DER STEREOMETRISCHE BESTANDESMITTELSTAMM

VON

ERIK LÖNNROTH

HELSINKI 1926

HELSINKI 1926, SUOMAL. KIRJALL. SEURAN KIRJAPAINON OY.

Die Tatsache, dass das Mittelwertcharakteristikum im allgemeinen als eines von den Hauptmerkmalen der verschiedenen Charakteristika einer statistischen Reihe anzusehen ist, mag schon an sich dazu beigetragen haben, dass dem Problem des stereometrischen Bestandesmittelstammes eine recht grosse Aufmerksamkeit in der forstmathematischen Literatur geschenkt worden ist. Dass dennoch aller Wahrscheinlichkeit nach das von dieser allgemeinen Bedeutung des Mittelwertcharakteristikums herrührende spezielle spekulative Interesse, dieses Bestandescharakteristikum in der praktischen Forstabschätzung möglichst ausgiebig ausnützen zu können, tatsächlich der bedeutungsvollste Faktor bei dieser Aufmerksamkeit gewesen ist, ist auf Grund mehrerer Umstände zu vermuten.

Ohne dass auf den letzterwähnten Gesichtspunkt als Hauptziel einer diesbezüglichen Untersuchung eingegangen wird, stellt der stereometrische Bestandesmittelstamm doch schon an und für sich ein mit speziellen biologischen Momenten verknüpftes interessantes mathematisch-statistisches Problem dar. Eine weitere prinzipielle Bedeutung gewinnt das Thema dadurch, dass es bei der Anwendung der üblichen statistischen Mittel zur Berechnung der Mittelwerte der taxatorisch bedeutsamen primären Stammcharakteristika — z. B. gerade zum Zweck der erwähnten praktischen Ausnutzung des Mittelstammes — von grundsätzlichem Gewicht ist zu erfahren, wie sich diese verschiedenen Charakteristikummittelwerte bei einer einheitlichen und durchgehenden Bestandesgesamtcharakterisierung zueinander verhalten. —

Das Problem des stereometrischen Bestandesmittelstammes wird in der vorliegenden Studie vom Standpunkt der zwei zuletzt charakterisierten, innig miteinander verbundenen und für die Frage des Bestandesmittelstammes grundlegenden Themen aus aufgefasst. Damit die diesbezüglichen theoretischen Überlegungen zugleich eine konkrete, in biologischer Hinsicht vollgültige Grundlage erhalten, wird die Untersuchung in enger Beziehung zu einem in der Sache als repräsentativ anzusehenden Bestandesmaterial ausgeführt. Erst auch hierdurch wird die Untersuchung entscheidend und werden die gewonnenen Ergebnisse bedeutungsvoll.

Unter dem stereometrischen Bestandesmittelstamm wird hier ein Bestandesgesamtcharakteristikum verstanden, in bezug auf welches:

1) das mittlere Bestandesvolumen, die mittlere Bestandeskreisfläche bzw. der entsprechend mittlere Bestandesdurchmesser, die mittlere Bestandeshöhe und die entsprechend mittlere Bestandesformzahl in einer zueinander in theoretischer Hinsicht bindend koordinierten Lösung stehen;

2) ein dieser Lösung entsprechendes Gegenstück (ein Stamm) in einem eine wenigstens annähernd normale Individuenvariation zeigenden und mit Rücksicht auf »das Gesetz der grossen Zahlen» hinreichend grossen Musterbestand tatsächlich zu finden ist.[1]

Was besonders das Bestandesmaterial betrifft, das hier zur näheren Erläuterung der behandelten Frage zur Anwendung gekommen ist, ist zu dem fraglichen Grunddurchmesser der Brusthöhendurchmesser (1,3 m über dem Boden) gewählt worden. In Übereinstimmung hiermit wird also die entsprechende Stammkreisfläche als Grundfläche und die Formzahl als Brusthöhenformzahl bezeichnet.

Das hier benutzte Bestandesvergleichsmaterial geht auf eine Untersuchung über die Entwicklung gleichaltriger naturnormaler Kiefernbestände dreier in der Südhälfte Finnlands vorherrschender Waldtypen, nämlich des Myrtillus- (MT), des Vaccinium- (VT) und des Calluna- (CT) Typs, zurück.[2]

[1] Zur Definition gehört folglich, dass der Mittelstamm ausschliesslich durch Bestandesmittelwerte und nicht durch irgendwelche nicht als Bestandesmittelwerte zu betrachtenden Zahlenwerte charakterisiert wird. Vgl. z. B. LEVAKOVIĆ (1922, S. 16 Fussnote). Eine mit dieser Definition nicht übereinstimmende Ansicht ist neulich z. B. von NEUBAUER (1925, S. 4 ff.) vorgeführt worden. Siehe auch weiter unten.

A. LEVAKOVIĆ, Die Bestandesmassenaufnahme mittels Probestämmen. Wien und Leipzig.

W. NEUBAUER 1924—1925, Die Bestandesaufnahme nach dem Verfahren des Massenmittelstammes und nach Stammklassen gleicher Masse. Cbl. f. d. ges. Forstwes.

[2] Vgl. E. LÖNNROTH 1925, Untersuchungen über die innere Struktur und Entwicklung gleichaltriger naturnormaler Kiefernbestände, basiert auf Material aus der Südhälfte Finnlands. Acta forest. fenn., 30, N:o 1.

Objekt dieser Untersuchung waren 30 möglichst typenreine und betreffs des Eigenzustands des Gehölzes möglichst unberührte normale, jüngere und ältere Bestände, — je 10 für einen jeden untersuchten Waldtyp. Das studierte Altersintervall reichte von der Entstehung des Bestandes bis zu dessen 150. Lebensjahr.

Die nähere Charakterisierung der Probebestände geschah einerseits nach biologisch signifikanten Merkmalen und andrerseits auf Grund rein mechanischer Stammklassifizierung.

In erstgenannter Hinsicht wurden u.a. vier biologisch definierte und benannte Höhenschichten oder Etagen unterschieden: 1. Etage, herrschende (Ober-) Stämme; 2. Etage, mitherrschende (Vasallen-) Stämme; 3. Etage, beherrschte (Unter-) Stämme; 4. Etage, unterdrückte (Grund-) Stämme.

Die mit bestimmter Genauigkeit vorgenommene Messung der Stammvarianten der jeweils in Betracht kommenden Population setzte ihrerseits eine äquidistante mechanische Klassifizierung des Materials voraus. Diese Messung bzw. Klassifizierung der Stämme zielte auf die nähere mathematisch-statistische Charakterisierung der Etagen und des gesamten Bestandes in betreff der Variation des jeweils zu untersuchenden Charakteristikums ab.

Aus den für die vorliegende Studie prinzipiell wichtigen Ergebnissen der erwähnten Untersuchung sei besonders die ausgezeichnete innere Einheit und Zusammengehörigkeit der verschiedenen Beobachtungswerte eines jeden untersuchten Waldtyps erwähnt, was von einer grossen Homogenität der Waldtypen zeugt, die als Grundlage der Standortsbonitierung verwendet wurden.[1] Da daneben das Bestandesmaterial als für den Untersuchungszweck auch sonst repräsentativ und ausreichend angesehen werden konnte, und da die Ausgleichung der Beobachtungsreihen ihrerseits in voller Reziprozität zwischen den verschiedenen voneinander abhängigen Charakteristika durchgeführt wurde, so können die hier vorgelegten, auf das genannte Material gegründeten ausgeglichenen Wachstumskurven (Fig. 1—12) wohl auch als völlig repräsentativ angesehen werden. Noch vollwertiger aber wird das Material im Hinblick auf die in der vorliegenden Untersuchung durchzuführenden Spezialberechnungen dadurch, dass es drei unter sich ungleichwertige Waldtypen umfasst, die zusammen ein recht weites Intervall des Bodenproduktionsvermögens aufweisen.

[1] Vgl. E. LÖNNROTH 1926, Die Waldtypen und die innere Bestandesentwicklung. Finnland-Buch der Deutschen Dendrologischen Gesellschaft.

Wegen der näheren verschiedenartigen Beziehungen hinsichtlich der Aufnahme und der Behandlung des benutzten Probematerials wird auf die ersterwähnte Abhandlung des Verf. verwiesen.[1]

* * *

Der erste Schluss, der in der zu untersuchenden Frage gemacht wird, muss der sein, dass die Aufgabe, schon allein wegen der Tatsache, dass die Zahl der verschiedenen statistischen Mittel nicht begrenzt ist[2], auf verschiedene Weise gelöst werden kann.

Von den leitenden Prinzipien, die bei der in Betracht kommenden allgemeingültigen Lösung befolgt werden könnten[3], sind es vielleicht jedoch nur zwei, denen man grössere Aufmerksamkeit schenken dürfte. Das eine wäre: dasselbe statistische Mittel für alle obigen Mittelstammcharakteristika (Volumen, Grundfläche, Durchmesser, Höhe und Formzahl) zu erhalten, — und das andere: eine Lösung zu finden, die als Gesamtlösung möglichst einfach ist, — wobei beide Lösungen daneben die zwei obenerwähnten Bedingungen erfüllen müssen.

* * *

[1] Hier sei namentlich erwähnt, dass die vorgeführten Mitteldurchmesser- und -grundflächenwerte sich auf den berindeten Stamm beziehen, wogegen das Volumen und demgemäss die Formzahl für den rindenfreien Stamminhalt berechnet sind. Bei den Wägungen der Charakteristikumprimärwerte in den entsprechenden Mittelwertberechnungen ist demnach die Rinde jeweils in hiervon bedingter Weise berücksichtigt worden.

[2] Vgl. z. B. FECHNER (1878, S. 74): »Verstehen wir überhaupt unter einem Mittel aus gegebenen Einzelwerthen einen Werth, der nach einem bestimmten Princip so aus diesen Werthen abgeleitet wird, dass er zwischen dieselben fällt, oder kurz eine Function der Einzelwerthe, welche zwischen die Grenzwerthe fällt, so giebt es natürlich so vielerlei Mittel, als es Principe solcher Bestimmung oder Functionen der Art giebt, was unbestimmt viele sein möchten; — —.»

G. TH. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., Bd. XVIII.

[3] Irgendwelche Spezialzwecke des Mittelstammes werden hier nicht näherer Prüfung unterzogen. Ebenso wenig wird programmgemäss auf die jeweils in Betracht kommenden Baumgruppierungen, die auszuführenden Ermittlungen oder Schätzungen, bzw. Ausgleichungen der erhaltenen Beobachtungswerte, sowie die in Vorschlag gebrachten, durch indirekte Verfahren gekennzeichneten Hilfsmethoden zur Bestimmung des fraglichen Mittelstammes oder einiger von dessen Grundcharakteristika eingegangen.

Das erste Prinzip kann exakt durchgeführt werden. Das bezügliche Mittel ist das mit der Stammzahl gewogene geometrische Mittel. Die Allgemeinformel dieses Mittels ist mit den hier verwendeten Bezeichnungen

$$m_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod x^N}, \tag{I}$$

wo x das Mass der jeweils in Frage stehenden Eigenschaft der Variante bzw. der benutzten Grundklasse, N die Frequenz dieser Klasse (ΣN die Gesamtfrequenz der Reihe) und $m_{N_{ge}}$ das auf die erwähnte Weise definierte Mittel bezeichnen.[1]

Der Beweis für das Gesagte ist folgender:[2]

Wird das Volumen eines einzelnen Stammes mit v, die Grundfläche

[1] Damit sich die heranzuziehenden verschiedenen Mittelqualitäten deutlich voneinander abheben, ist es angebracht, bestimmte Zeichen für die Mittel zu verwenden.

Da das Mittel im allgemeinen durch drei Hauptfaktoren charakterisiert wird: 1) das Charakteristikum, auf dessen Gebiet der Mittelwert berechnet wird, 2) die Gewichtszahl (bzw. die Gewichtszahlen), mit welcher die Primärwerte gewogen werden, 3) die Qualität des Mittels (statistische Grundqualität, Gradhöhe usw.), so ist das Mittel im allgemeinen auch durch dreierlei Hauptzeichen zu bezeichnen. Je nach der Genauigkeit ferner, mit der die einzelnen Momente verdeutlicht werden sollen, kann die schliessliche Anzahl der Zeichen noch wachsen.

Z. B. in der obenerwähnten Formel beträgt die Zeichenzahl drei: die Bezeichnung des Mittelwerts im allgemeinen (m) (in dieser Allgemeinformel ist also kein spezielles Charakteristikum zum Ausdruck gebracht), die Primärwerte mit der Variantenzahl (Stammzahl) (N) gewogen, geometrisches Mittel (ge).

[2] Die verschiedenen theoretischen Erwägungen bei der Herleitung des stereometrischen Mittelstammes machen natürlicherweise keinen sachlichen Unterschied zwischen einer beliebigen (biologischen, mechanischen, . . .) Baumkategorie (-gruppe, -klasse, -stufe, . . .) innerhalb des Bestandes und dem Bestand in seiner Gesamtheit. Andrerseits ist dabei jedoch zu beachten, dass die Variantenverteilung einer innerbestandlichen Baumkategorie im allgemeinen ein anderes Bild als die des ganzen Bestandes zeigt. Vgl. weiter unten.

Was ihrerseits die gewöhnliche Bestimmung der Vertreterwerte der primären äquidistanten Aufnahmestufen (Durchmesser etc.) einfach durch Zentrumwerte der Intervalle betrifft, sei hier an die SHEPPARD'schen diesbezüglichen Korrekturen erinnert.

W. F. SHEPPARD 1897, On the Calculation of the Average Square, Cube, etc., of a large number of Magnitudes. Journ. of the Roy. Stat. Soc., Vol. LX. — Ders. 1898, On the Calculation of the most Probable Values of Frequency-Constants, for Data arranged according to Equidistant Divisions of a Scale. Proceed. of the London Mathem. Soc., Vol. XXIX.

mit g, die Höhe mit h und die entsprechende Formzahl mit f bezeichnet, so ist ja der Formzahldefinition gemäss

$$v = ghf. \tag{1}$$

Lässt man diese Bezeichnungen weiter für die Vertreterstämme der benutzten Grundklassen einer Stammpopulation (z. B. Bestand) ganz allgemein gelten, und fügt man noch für den entsprechenden Durchmesser die Bezeichnung d hinzu, so sind die fraglichen geometrischen Mittelwerte der in Rede stehenden Charakteristikumreihen der Stammpopulation

$$v_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod v^N}, \tag{2}$$

$$g_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod g^N}, \tag{3}$$

$$d_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod d^N}, \tag{4}$$

$$h_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod h^N}, \tag{5}$$

$$f_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod f^N}. \tag{6}$$

Werden bei dem Bestreben, einen gemeinsamen Mittelstamm der verschiedenen Charakteristikumreihen der Stammpopulation zu erhalten, die Gleichungen (3), (5) und (6) der Formel (1) gemäss miteinander multipliziert, so ergibt sich die Gleichung

$$g_{N_{ge}} h_{N_{ge}} f_{N_{ge}} = \sqrt[\Sigma N]{\prod (ghf)^N}, \tag{7}$$

die, wie ersichtlich, mit der Gleichung (2) identisch ist und somit zu der wichtigen Mittelformel der Stammpopulation

$$v_{N_{ge}} = g_{N_{ge}} h_{N_{ge}} f_{N_{ge}} \tag{8}$$

führt.

Was weiter das Verhältnis zwischen der Grundfläche und dem Durchmesser betrifft, so hat man nach der Formel (4)

$$\frac{\pi}{4} d_{N_{ge}}^2 = \frac{\pi}{4} \left(\sqrt[\Sigma N]{\prod d^N} \right)^2, \tag{9 a}$$

$$= \sqrt[\Sigma N]{\prod \left(\frac{\pi}{4} d^2\right)^N}, \tag{9 b}$$

welche Formel ihrerseits mit der Gleichung (3) identisch ist und mithin zur zweiten diesbezüglichen wichtigen Mittelformel

$$g_{N_{ge}} = \frac{\pi}{4} d_{N_{ge}}^2 \tag{10}$$

führt.

Der stereometrische Bestandesmittelstamm kann folglich exakt mit einem einzigen statistischen Mittel, bei dem noch die Gewichtszahl durchgehends dieselbe ist, realisiert werden. —

Abgesehen von den jüngeren Beständen, in welchen die verhältnismässig sehr kleinen Stammvarianten den geometrischen Bestandesmittelstamm kräftiger herunterdrücken, ist dieser Mittelstamm, allgemein betrachtet und im Hinblick auf den recht regelmässigen Verlauf, den der Baumbestand normalerweise zeigt, zu den »typischen» Stammvarianten des Bestandes zu rechnen.

Um dies näher zu demonstrieren, sind die fraglichen Charakteristikummittelwerte in Verbindung mit dem untersuchten Bestandesmaterial berechnet und in den der vorliegenden Studie beigefügten graphischen Tafeln veranschaulicht worden.

Einerseits sind in Fig. 1, 3, 5, 7, 8 und 10 die bezüglichen mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen Mittelwerte m_{N_1} (vgl. weiter unten) der vier Etagen und des Bestandes dargestellt[1], und andrerseits sind die entsprechenden geometrischen Bestandesmittelwerte $m_{N_{ge}}$ durch die Bestandesmittelwertdifferenzen $m_{N_{ge}} - m_{N_1}$, mit m_{N_1} als Grundlage, in Fig. 2, 4, 6, 7, 9 und 11 zur Anschauung gebracht. Da bekanntlich $m_{ge} < m_1$ ist, sind diese Differenzen durch negative Werte zu kennzeichnen.[2]

Der angeführte Satz über eine gute Lage des so berechneten Be-

[1] Über die Berechnung dieser Werte siehe näher E. LÖNNROTH 1925, l. c.

[2] Wegen der ganz engen Variation der Formzahl in den mittelalten und alten Beständen (vgl. weiter unten) wurden die diesbezüglichen Formzahldifferenzen so klein, dass sie bei dem Massstab der Figur 11 nicht sichtbar werden konnten.

standesmittelstammes in dem innerbestandlichen Variationsgebiet ist — wenigstens in den älteren Beständen —, wie ersichtlich (natürlich sowohl in betreff eines jeden in Rede stehenden Charakteristikums für sich wie der allseitigen Kombination und Vergleichung miteinander), bestätigt. Die oben ausgesprochene biologische Grundbedingung eines annehmbaren Mittels ist somit durch das mit der Stammzahl gewogene geometrische Mittel dementsprechend erfüllt.

Die diesbezügliche Lösung des stereometrischen Mittelstammes muss folglich, von dem jetzt behandelten Standpunkt aus beurteilt, als eine vollkommene Lösung des aufgestellten Problems angesehen werden.

Zu einer einigermassen anderen Auffassung gelangt man jedoch, wenn man mit der Beurteilung erstens die Frage über die Einfachheit bzw. die Bequemlichkeit und zweitens die Frage über die Angemessenheit bei der praktischen Akkommodierung des geometrischen Mittels verknüpft. Tatsächlich ist in diesen Hinsichten nicht zu leugnen, dass einige als ungünstig anzusehende Züge in der angeführten Lösung enthalten sind.

So ist die allgemeine Unbequemlichkeit des geometrischen Mittels speziell im Verhältnis zu dem bequemen arithmetischen Mittel als ein Nachteil zu erachten. Freilich kann man ja auch den hochgradigen geometrischen Mittelwert ohne Logarithmieren auf einem Umweg berechnen, aber eine bedeutendere Erleichterung wird auch dadurch nicht erlangt. [1]

Zweitens kann man ja mit Hilfe des geometrischen Mittelstammes nicht das Gesamtvolumen, bzw. die Gesamtgrundfläche des Bestandes direkt berechnen, was natürlicherweise als ein grundsätzlicher Nachteil bei der praktischen Anwendung dieses Mittelstammes gelten muss. Es ist in dieser Hinsicht im Gegenteil gerade zuzugeben, dass sowohl das Volumen wie die Grundfläche des Mittelstammes am natürlichsten so zu berechnen wären, dass der bezügliche Mittelwert mal Stammzahl das Gesamtvolumen bzw. die Gesamtgrundfläche der Reihe ohne weiteres ergeben müsste, — was also nicht auf das mit der Stammzahl gewogene geometrische, sondern auf das entsprechende arithmetische Mittel hinauslaufen würde.

Durch dieses andere Mittel würde auch das oben angeführte zweite leitende Prinzip der Mittelstammlösung — das Prinzip der höchstmöglichen Einfachheit dieser Lösung — jedenfalls in betreff dieser zwei Charakteristika durchgeführt werden. —

In welchen Gesamtkonstellationen der fünf bezüglichen Mittelwerte des stereometrischen Bestandesmittelstammes ein solcher Beginn der Lösung — ein Beginn also, der die Erfüllung des zweiten erwähnten Prinzips bezweckt — führen wird, wird im Folgenden näher untersucht werden. [1]

* * *

Die Formel des mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen Volummittels v_{N_1} ist den obigen Bezeichnungen gemäss

[1] Wie MESSEDAGLIA (1880, S. 390 (französisch)) gezeigt hat, ist der geometrische Mittelwert mehrerer Zahlenwerte zugleich der geometrische Mittelwert zwischen dem grösseren arithmetischen und kleineren harmonischen Mittelwert dieser Werte, somit (vgl. auch weiter unten)

$$(II) \qquad m_{N_{ge}} = \sqrt{m_{N_1} m_{N_{ha}}}.$$

Durch Berechnung dieser zwei zuletztgenannten Mittelwerte kann der gesuchte geometrische Mittelwert unmittelbar aus deren Produkt mit Hilfe einer gewöhnlichen Wurzeltabelle gewonnen werden.

A. MESSEDAGLIA, Il calcolo dei valori medi e le sue applicazioni statistiche. Arch. di Stat. — Dasselbe französisch: Calcul des valeurs moyennes. Annal. de Démogr. intern.

Vgl. auch Formel (VIII) weiter unten.

[1] Wie z. B. G. TH. FECHNER den Vorrang des arithmetischen Mittels unter den verschiedenen statistischen Mitteln überhaupt formuliert, geht aus folgenden Worten hervor (1878, S. 76, l. c.): »Immerhin aber ist bemerkenswerth, wie der arithmetische Mittelwerth ein Verknüpfungsglied für Mittel von so ganz verschiedenem Princip der Bestimmung bildet, als die Potenzmittelwerthe, die mit denselben um den Namen streitenden Mittelwerthe und die Combinationsmittelwerthe sind, so dass man, wenn man sonst keinen besondern Grund haben sollte, das eine Princip dem andern vorzuziehen, auch hierin einen Grund finden könnte, sich an das arithmetische Mittel als das allen gleich genügende zu halten.»

Wegen des Namens Potenzmittel siehe sonst näher E. LÖNNROTH (1925, S. 100—101 Fussnote, l. c.).

Es sei auch erwähnt, dass zahlreiche Fachmänner für das Mittelstammvolumen eben das mit der Stammzahl gewogene arithmetische Mittel benutzt oder vorgeschlagen haben. Vgl. z. B. folgende diesbezüglichen Werke und Aufsätze:

T. v. LOREY 1878, Die mittlere Bestandeshöhe. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit.

R. WEBER 1899, Ueber die mathematischen Beziehungen zwischen dem arithmetischen Mittelstamm und der Bestandesmasse. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit.

A. LEVAKOVIĆ 1922, l. c. (S. 22.)

U. MÜLLER 1923, Lehrbuch der Holzmesskunde. 3. Aufl. Berlin. (S. 304.)

W. TISCHENDORF 1925 a, Die Genauigkeit von Messungsmethoden und Messungsergebnissen bei Holzmassenermittlungen. Forstwiss. Cbl. (S. 614.) — Ders. 1925 b, Mittelstammdimensionen. Ibid. (S. 787.) — Ders. 1926, Neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Holzmassenermittlung. Forstarchiv. (S. 55.)

(11 a) $$v_{N_1} = \frac{\Sigma vN}{\Sigma N}.$$

Bezeichnet man das vielfache Volumen der angewandten Grundklasse mit V, so lässt sich die Formel (11 a) in folgender Form schreiben:

(11 b) $$v_{N_1} = \frac{\Sigma V}{\Sigma N}.$$

Benutzt man drittens die obengenannten drei Grundcharakteristika des Einzelvolumens: die Grundfläche g, die Höhe h und die entsprechende Formzahl f, so geht die Formel (11 a) noch in die bekannte Form

(11 c) $$v_{N_1} = \frac{\Sigma ghfN}{\Sigma N}$$

über. — Bezeichnet man schliesslich die entsprechenden und bis auf weiteres noch unbekannten Grundcharakteristika des Bestandesmittelstammes mit g_m, h_m und f_m, so kann man analog noch die Formel (vgl. Gleichung (1))

(12) $$v_{N_1} = g_m h_m f_m$$

aufstellen. Dass jedoch das in betreff der Komponentenmittel nicht näher definierte rechte Glied dieser Formel keineswegs gerade die Anwendung des Mittels v_{N_1} als linken Gliedes der Gleichung voraussetzt, ist ohne weiteres klar. In diesem Abschnitt der vorliegenden Studie wird das Produkt $g_m h_m f_m$ jedoch lediglich in der von der Gleichung (12) gemeinten Weise angewandt.

Aus den Gleichungen (11 b) und (12) ergibt sich die Formel

(13) $$g_m h_m f_m \Sigma N = \Sigma V.$$

Werden ΣV und ΣN anfangs als bekannt angenommen, so enthält die Gleichung (13) drei Unbekannte. Theoretisch können zwei von ihnen beliebig bestimmt werden, wonach die dritte durch die Gleichung bestimmt wird.

Damit jedoch eine gewählte Lösung gültig sei, muss die Bedingung erfüllt werden, dass die Werte der als unbekannt betrachteten Charakteristika in bezug aufeinander biologisch möglich sind. Praktisch betrifft dies besonders die Formzahl, denn ihre Variationsamplitude ist (wenn es sich nicht um recht junge Bestände handelt) bekanntlich im Vergleich zu den übrigen in Frage stehenden Charakteristika ziemlich unbedeutend. [1]

[1] Wie aus Fig. 7 ersichtlich, tangieren die Durchmesserspielräume der Ober- und Grundetagen einander. Die Kombination: Durchmesser — — Höhe ist also wenigstens

Wie diese dreifache Charakteristikumlösung sachlich vorgenommen werden kann, haben schon v. LOREY (1878) und SCHIFFEL (1900) gezeigt. [1]

Hinsichtlich der G r u n d f l ä c h e des Mittelstammes verbleibt man also bei dieser Lösung auf demselben Boden wie hinsichtlich des Volumens, d. h. die Grundfläche wird ebenso durch das mit der S t a m m z a h l g e w o g e n e a r i t h m e t i s c h e M i t t e l (g_{N_1}), somit durch folgende Formeln gefunden:

(14 a) $$g_{N_1} = \frac{\Sigma gN}{\Sigma N},$$

oder

(14 b) $$g_{N_1} = \frac{\Sigma G}{\Sigma N},$$

wo G die vielfache Grundfläche der angewandten Grundklasse bezeichnet.

Diese Lösung bestimmt somit gleichzeitig als D u r c h m e s s e r des Bestandesmittelstammes das mit der S t a m m z a h l g e w o g e n e q u a d r a t i s c h e P o t e n z m i t t e l

(15 a) $$d_{N_{po_2}} = 2\sqrt{\frac{g_{N_1}}{\pi}},$$

(15 b) $$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2 N}{\Sigma N}},$$

im normalen Naturbestand sehr reich an Varianten, indem sie die Lösung g_m — — h_m, speziell in dem Optimumgebiet der Variation, durch verhältnismässig weitreichende Kombinationen ermöglicht (d. h. einem bestimmten Durchmesser entspricht eine recht bedeutende Höhenvariation und umgekehrt). Vgl. z. B. FLURY (1898, S. 196 ff.). Betrachtet man zweitens die relativen Beziehungen zwischen den ausgeglichenen Mittelwerten der Grund- und der Oberschicht, so erhellt aus Fig. 5, 8 und 10, dass der mittlere Durchmesser der Grundbäume nirgends über 60 % vom entsprechenden Durchmesser der Oberbäume steigt und dass die mittlere Grundhöhe überall unter 70 % von der mittleren Oberhöhe liegt, — wogegen die mittlere Formzahl der Oberbäume in höherem Alter über 90 % von der entsprechenden Formzahl der Grundbäume ist (wie bekannt, steigt die Formzahl von der Oberetage nach den unteren Etagen zu). — Vgl. ebenso z. B. WEISE (1880, S. 11).

PH. FLURY, Ergebnisse aus Kahlschlägen. Mitt. d. Schweiz. Centralanst. f. d. forstl. Versuchswes., Bd. VI.

W. WEISE, Ertragstafeln für die Kiefer. Berlin.

[1] T. v. LOREY, l. c.

A. SCHIFFEL, Ueber Bestandeshöhen und Bestandesformzahlen. Cbl. f. d. ges. Forstwes.

(15 c) $$= \sqrt{d_{N_1}^2 + \sigma_d^2},$$

wo σ_d die Dispersion der Durchmesservariation vertritt.[1] —

Die Gleichung (14 b) kann auch geschrieben werden

(16) $$g_{N_1} \Sigma N = \Sigma G.$$

Wird statt g_m in Formel (13) g_{N_1} eingesetzt und noch eine Substitution gemäss Gleichung (16) vorgenommen, so erhält man nach Entwicklung die entsprechende Formel für die mittlere Bestandesformhöhe $f_m h_m$

(17) $$f_m h_m = \frac{\Sigma V}{\Sigma G}.$$

Die mittlere Höhe des Bestandes bestimmt v. LOREY danach im Prinzip folgendermassen:

Gleichung (17) kann geschrieben werden in der Form

(18) $$h_m f_m \Sigma G = \Sigma V.$$

Setzt man anstelle des Produktes $f_m \Sigma G$ die Produktensumme $\Sigma f G$ ein, was bedeutet, dass die vielfachen Grundflächen der verschiedenen Baumkategorien mit den ihnen entsprechenden und sie vertretenden Formzahlen primär multipliziert werden, statt dass in der Gleichung (18) die Gesamtgrundfläche des Bestandes mit der bis auf weiteres unbekannten mittleren Bestandesformzahl multipliziert wurde, so erhält Gleichung (18) die Form

[1] Bekanntlich ist das Dispersion genannte Streuungsmass der Reihenvariantenverteilung durch die allgemeingültige Formel

(III) $$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x - m_1)^2 N}{\Sigma N}}$$

gegeben (vgl. die Bezeichnungen der Formel (I)).

Durch Entwicklung dieser Formel und durch Substitution der Allgemeingleichungen des arithmetischen und des quadratischen Potenzmittels (vgl. E. LÖNNROTH 1925, s. 99—101 nebst Fussnoten, l.c. — und hier s. 29 Fussnote 3) erhält man die Allgemeinformel

(IV) $$m_{po_2} = \sqrt{m_1^2 + \sigma^2}. \qquad \text{(OPPERMANN.)}$$

A. OPPERMANN 1887, Forelæsninger over Taksations- og Tilvækstlære. (Autogr.) København.

(19) $$h_m \Sigma f G = \Sigma V.$$

Hieraus findet man

(20 a) $$h_m = \frac{\Sigma V}{\Sigma f G},$$

woraus, wenn die verschiedenen Glieder des Nenners mit den vertretenden Höhen h der Baumkategorien erweitert werden, weiterhin folgt, dass als Höhe des schon oben definierten Volum-Grundflächenmittelstammes des Bestandes sich das mit dem vielfachen Volumen gewogene harmonische Mittel ergibt:

(20 b) $$h_{V_{ha}} = \frac{\Sigma V}{\Sigma \frac{V}{h}}.\ ^{1} \qquad \text{(v. LOREY.)}$$

Durch die Herleitung der Gleichung (19) ist auch das Bestandesformzahlmittel fixiert. Setzt man nämlich in die Gleichung (17) anstelle von h_m dessen Wert aus Formel (20 a) ein, so erhält man, wie SCHIFFEL (1900, S. 292—293) gezeigt hat[2], als Formzahl des Bestandesmittelstammes das mit der vielfachen Grundfläche gewogene arithmetische Mittel

(21) $$f_{G_1} = \frac{\Sigma f G}{\Sigma G}. \qquad \text{(SCHIFFEL.)}$$

Die Formel (20 b) und (21) bilden so gemeinsam eine vollgültige Komponentenlösung des Formhöhencharakteristikums auf Grund von Formel (17).

Eine andere Sache ist es, dass diese Lösung keineswegs die einzig mögliche ist. Im Gegenteil: die Lösungen sind theoretisch durchaus nicht begrenzt. Als Beispiel für andere Möglichkeiten sei an erster Stelle ein Verfahren erwähnt, das zu einem entgegengesetzten Formelpaar führt als das obenerwähnte, somit (vgl. die obengenannten Publikationen von SCHIFFEL und v. LOREY):

(22) $$f_{V_{ha}} = \frac{\Sigma V}{\Sigma \frac{V}{f}}, \qquad \text{(SCHIFFEL.)}$$

(23) $$h_{G_1} = \frac{\Sigma h G}{\Sigma G}. \qquad \text{(v. LOREY.)}$$

[1] Von den vielen Formelvarianten des harmonischen Mittels ist hier die vielleicht gewöhnlichste angeführt.

[2] A. SCHIFFEL, l. c.

Auch zur Anführung anderer derartiger Beispiele kann Anlass vorliegen. Demgemäss mögen zunächst der Höhe probeweise z. B. die folgenden Mittel gegeben werden: das mit der Stammzahl gewogene arithmetische Mittel, ebenso das quadratische Potenzmittel, das mit der vielfachen Grundfläche gewogene harmonische sowie das mit dem vielfachen Volumen gewogene arithmetische Mittel. Diese werden mit Hilfe folgender Formeln bestimmt:[1]

[1] Bei der Ausführung der Mittelwertberechnungen wurden die fraglichen Gewichtszahlen der angewandten primären Baumkategorien in einigen Fällen prozentual aus dem Gesamtbetrag des in Frage stehenden Charakteristikums ausgedrückt. Im Hinblick hierauf vereinfachten sich die Formeln der erwähnten Mittel folgendermassen:

$$m_1 = \frac{\Sigma xP}{100}, \qquad \text{(V)}$$

$$m_{po_2} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 P}{100}}, \qquad \text{(VI)}$$

$$m_{ha} = \frac{100}{\Sigma \frac{P}{x}}, \qquad \text{(VII)}$$

wo x die fraglichen Vertreterwerte der angewandten Baumkategorien, P die ihnen entsprechenden prozentualen Gewichtszahlen und m den gesuchten Mittelwert darstellen. Wo die der Reihe entsprechende Dispersion σ berechnet wurde, war das quadratische Potenzmittel jedoch am bequemsten durch die Hilfsformel

$$m_{po_2} = \sqrt{m_1^2 + \sigma^2} \qquad \text{(IV)}$$

zu berechnen (vgl. S. 14 nebst Fussnote). — Auch das oben angeführte geometrische Mittel erhielt eine entsprechende Prozentualformel, nämlich

$$m_{ge} = \sqrt[100]{\Pi\, x^P}. \qquad \text{(VIII)}$$

Es sei noch erwähnt, dass alle hier vorgebrachten statistischen Mittel ihrem Charakter nach eindeutig sind. Somit erfüllen sie bei der Lösung des fraglichen Problems auch in dieser Beziehung die vorausgesetzte Anforderung. Was die übrigen Eigenschaften sowie die gegenseitigen Beziehungen dieser Mittel betrifft, so siehe näher z. B. BOETIUS (ca. 500), FECHNER (1878), MESSEDAGLIA (1880), BLASCHKE (1906, S. 71 ff.), ŽIŽEK (1908, S. 159 ff.).

A. M. T. S. BOETIUS, De Institutione Arithmetica. E libris manu scriptis edidit G. FRIEDLEIN. Lipsiae. 1867.

G. TH. FECHNER, l. c.

A. MESSEDAGLIA, l. c.

E. BLASCHKE, Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig und Berlin.

FR. ŽIŽEK, Die Statistischen Mittelwerte. Leipzig.

$$h_{N_1} = \frac{\Sigma hN}{\Sigma N}; \qquad (24)$$

$$h_{N_{po_2}} = \sqrt{\frac{\Sigma h^2 N}{\Sigma N}}; \qquad \text{(KUNZE.)}^1 \qquad (25)$$

$$h_{G_{ha}} = \frac{\Sigma G}{\Sigma \frac{G}{h}}; \qquad (26)$$

$$h_{V_1} = \frac{\Sigma hV}{\Sigma V}. \qquad \text{(SCHIFFEL, GRUNDNER.)}^2 \qquad (27)$$

Die Paarwerte für die Formzahl erhält man danach aus der Gleichung (17), wenn man den Inverswert des jeweils gewählten Höhenmittels mit dem Quotienten $\frac{\Sigma V}{\Sigma G}$ multipliziert. — In gleicher Weise kann man bezüglich des Formzahlmittelwerts verfahren und die mittlere Höhe entsprechend herleiten.

Ein solches, statistisch vollbenanntes und demgemäss in eine einfache Form gekleidetes Formelpaar, wie es die ersterwähnten $h_{V_{ha}}$ — — f_{G_1}-, bzw. h_{G_1} — — $f_{V_{ha}}$-Lösungen repräsentieren, dürfte jedoch weder die hier angeführten anderen noch auch sonstige entsprechende Formelvorschläge bilden (vgl. jedoch folgende Fussnote). Wenigstens deshalb könnte man gerade diese erwähnten Formelpaare den anderen, übrigens auch theoretisch sachgemässen vorziehen, woraus seinerseits folgen würde, dass sie, was eine harmonische, theoretisch exakte Lösung vom rein statistischen Standpunkt aus betrifft, auf Grund der hier von vornherein gewählten Volum- und Grundflächenmittel, die bestmögliche Mittelkombination ver-

[1] M. FR. KUNZE 1883, Untersuchungen über die Genauigkeit, welche bei Holzmassenaufnahmen durch Klassenprobestämme zu erreichen ist. Suppl. zum Thar. Forstl. Jahrb., Suppl.-Bd. III, 1884. (S. 5.) — Ders. 1916, Anleitung zur Aufnahme des Holzgehaltes der Waldbestände. 3. Aufl. Berlin. (S. 29.)

[2] A. SCHIFFEL 1898, Kritische Betrachtungen über die Holzmassenermittlung nach der Bestandesformhöhe. Cbl. f. d. ges. Forstwes. (S. 300—301.)

F. GRUNDNER 1904, Untersuchungen im Buchenhochwalde über Wachstumsgang und Massenertrag. Berlin. (S. 13.)

Schon früher hat SPEIDEL (1893, S. 95) die entsprechende Formel mit dem Probestammvolumen als Gewichtszahl angeführt.

E. SPEIDEL, Beiträge zu den Wuchsgesetzen des Hochwaldes und zur Durchforstungslehre. Tübingen.

t r e t e n d ü r f t e n.[1] (Vgl. v. LOREY 1878, 1883, 1901; SCHIFFEL 1900; LEVAKOVIĆ 1922.)[2]

Hiernach wäre weiter zu untersuchen einerseits, wie die gewählten bzw. gelösten Mittel, sowohl ein jedes für sich wie besonders in voller Mittelstammkombination, der b i o l o g i s c h e n Bedingung, die oben vorausgesetzt wurde, entsprechen, und andrerseits, ob sich die rein statistische Einfachheit der erhaltenen Mittel auch in praktisch-technischer Hinsicht weiter bewährt.

Was die erstgenannte Frage anbelangt, ist sie durch direkte Materialvergleichung am leichtesten und sichersten zu prüfen.

Was in diesem Sinne zunächst die Entwicklung des V o l u m e n s und der G r u n d f l ä c h e des Bestandesmittelstammes betrifft, so sind aus Fig. 1 und 3 die Lagen der in der Gleichungen (11) und (14) dargestellten, mit den Stammzahlen gewogenen arithmetischen Mittelwerte dieser Charakteristika im Vergleich zu den entsprechenden Etagenmittelwerten ersichtlich. Das Verhalten der Etagenmittelwerte ihrerseits zu der ganzen Variationsweite der genannten Charakteristika bildlich darzustellen, ist dagegen hier nicht als nötig erachtet worden, weil man eine hinreichend gute Vorstellung in dieser Hinsicht schon aus einer entsprechenden, die Durchmesservariation erläuternden Figur erhält, worin die ganze Stammverteilung, sowohl die der verschiedenen Etagen wie die des gesamten Bestandes, nebst den in Frage stehenden arithmetischen Mittelwerten graphisch veranschaulicht sind (Fig. 7).[1]

Aus diesen Figuren geht klar hervor, dass die erwähnten statistischen Mittel eine variationstechnisch ausgezeichnete Lage besitzen, was ja hinsichtlich des recht regelmässigen Verlaufs der Bestandesfrequenzkurve auch schon von vornherein offenbar war. In dieser Gegend, in der Nähe des Hauptmodewerts (Kurvengipfels) ist aller Wahrscheinlichkeit nach auch die reichste Variation der Kombination: Stärke — — Höhe — — Formzahl vorhanden, was seinerseits die volle Lösung des gesuchten Mittelstammes am besten ermöglicht.

Es ist natürlich, dass die relativen Lagen des gewählten Volum- und des gewählten Grundflächenmittels in den Variationsintervallen untereinander recht gut übereinstimmen, da die statistische Qualität der fraglichen Mittel dieselbe ist. — Zwischen den einzelnen Waldtypen sind dagegen Unterschiede in betreff der beiden in Betracht kommenden Charakteristika für sich zu bemerken, besonders was den C-Typ im Vergleich zu den anderen untersuchten Typen anbelangt, — was aber auf die jetzt behandelnde Frage sachlich nicht einwirkt.

In welcher Weise sich wiederum die in den Gleichungen (15) vorgeführten, mit der Stammzahl gewogenen quadratischen D u r c h m e s s e r p o t e n z m i t t e l w e r t e $d_{N_{po_2}}$ des Bestandes sowohl zu den entsprechenden arithmetischen d_{N_1} wie zu den ebenfalls vorgeführten arithmetischen Etagenmittelwerten verhalten, geht direkt oder durch Vergleich aus Fig. 6, 7 und 5 hervor. Die Bestandesdifferenz $d_{N_{po_2}} - d_{N_1}$ (Fig. 6) beträgt, wie ersichtlich, auch in höherem Alter nur ca. 6—8 mm (je nach dem Waldtyp). Auch die relative Lage von $d_{N_{po_2}}$ ist, wie die

[1] Wenn man die drei Unbekannten (g_m, h_m und f_m) in der Gleichung (13) auch in der Hinsicht als gleichwertig ansähe, dass man der Reihe nach einer jeden von ihnen das mit der Stammzahl gewogene arithmetische Mittel gäbe (wie es hier also schon mit der Grundfläche in der Formel (14) geschehen ist), so würde man natürlicherweise eine dreifache durchgehende Kombination der zwei erwähnten statistischen Mittel (des arithmetischen und des harmonischen) erhalten. Hierbei wäre das eine arithmetische Mittel ausschliesslich mit der Stammzahl, das harmonische Mittel allein mit dem vielfachen Volumen und das andere arithmetische Mittel abwechselnd mit der vielfachen Grundfläche, Höhe oder Formzahl gewogen, — was also zu sechs verschiedenen Kombinationen führen würde. Die Gleichung (13) könnte man entsprechend auf folgende allgemeingültige Weise schreiben:

$$\frac{\Sigma x N}{\Sigma N} \cdot \frac{\Sigma V}{\Sigma \frac{V}{y}} \cdot \frac{\Sigma z x N}{\Sigma x N} \cdot \Sigma N = \Sigma V, \qquad \text{(IX)}$$

wo x, y und z wechselweise die drei erwähnten Charakteristika vertreten würden. Dass eine auf diese Weise vermehrte Kombination zu irgendwelchen vorteilhafteren Gesamtlösungen führte als die zwei schon genannten Kombinationen, ist nicht anzunehmen. Wenigstens wird die Lösung des mittleren Durchmessers hierdurch komplizierter, und auch die neuen Gewichtszahlen (vielfache Höhe bzw. Formzahl) sind verhältnismässig nicht als besonders vorteilhaft anzusehen. Theoretisch ist dagegen natürlich nichts gegen eine solche Lösung einzuwenden. — Vgl. noch den folgenden Abschnitt dieser Studie.

[2] T. v. LOREY 1878, l. c. — D e r s. 1883, Die mittlere Bestandeshöhe. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit. — D e r s. 1901, Bemerkungen zu einigen Fragen aus dem Gebiete der Holzmesskunde. Ibid.

A. SCHIFFEL, l. c.

A. LEVAKOVIĆ, l. c.

[1] Über die näheren Beziehungen in betreff der Form der Frequenzkurven siehe E. LÖNNROTH (1925, S. 219 ff., l. c.).

von d_{N_1}, natürlich bei der praktischen Bestimmung des Mittelstammes sehr vorteilhaft.[1 2]

Aus Fig. 12 ersieht man die relative Stellung des Mittelwerts der in Gleichung (17) bestimmten Formhöhe. Auch gegen die Einordnung dieses Mittelwerts in den in Frage stehenden Spielraum ist hier nichts einzuwenden.

Es fehlt noch die Prüfung der Höhe und der Formzahl.

Zur Erleichterung dieser kombinierten Untersuchung werden erstens in Fig. 8, wie schon teilweise erwähnt, die mittleren Höhen der Etagen nebst der mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen Bestandesmittelhöhe h_{N_1} und in Fig. 9 die übrigen obenerwähnten Bestandesmittelhöhen: $h_{N_{po_2}}$, $h_{G_{ha}}$, h_{G_1}, $h_{V_{ha}}$ und h_{V_1}, wie auch die mittlere Oberhöhe h_o (zum Vergleich), durch Differenzen in bezug auf die arithmetische Bestandesstammzahlmittelhöhe h_{N_1} veranschaulicht. In der letzterwähnten Figur ist ausserdem die aus Formel (17) durch Einsetzung der Formzahl f_{N_1} hergeleitete Bestandesmittelhöhe $h_{(f_{N_1})}$ durch Strich-Punkt dargestellt.

Fig. 9 bedarf kaum genauerer Erläuterungen. Die bekannten Kraftverhältnisse zwischen den einzelnen Gewichtszahlen und Mittelqualitäten gehen deutlich daraus hervor. Man sieht, wie erheblich der Mittelwert steigt, wenn die Stammzahlgewichtszahl mit der Grundflächengewichtszahl vertauscht wird, und wie man von dieser ferner einen geringeren Anstieg erhält, wenn an Stelle der Grundfläche das Volumen gesetzt wird. Ebenso treten natürlich in den Berechnungen auch die bekannten Tatsachen zutage, dass das harmonische Mittel von den hier erwähnten Mittelqualitäten die kleinste und das quadratische Potenzmittel die grösste ist.

[1] Die Brusthöhendurchmesserentwicklung beginnt in demselben Altersjahr, in welchem der erste Oberbaum die Brusthöhe erreicht, und das kleinste Mass des Durchmessers ist durch die Dicke der Brusthöhenjahrestriebe gegeben. Die Interpretierung dieser Durchmesserentwicklung wird auch nicht biologisch signifikant, ehe alle zur fraglichen biologischen Baumkategorie (Etage, Bestand) gehörigen Individuen die Brusthöhe erreicht haben. Die Wachstumszeit, die von dem Zeitpunkt, wo der erste Jungbaum die Brusthöhe überschreitet, bis dahin dauert, wo der letzte diese Höhe erreicht hat, ist in den graphischen Abbildungen durch punktierte Kurvenstücke bezeichnet. Vgl. näher E. LÖNNROTH (1925, S. 179—181, 205—206, l. c.).

[2] Die in Fig. 6 vorgeführten anderen positiven Bestandesmittelwerte werden weiter unten zur Behandlung kommen. — Die Differenz zwischen dem mittleren Oberdurchmesser $d_{o_{N_1}}$ und dem mittleren Bestandesdurchmesser d_{N_1} ist hier nur zum Vergleich dargestellt.

Beachtenswert ist, dass das quadratische Potenzmittel der Stammzahlhöhe nur so wenig das entsprechende arithmetische Mittel überschreitet, wie es die Figur zeigt. Es würden daher ganz andere Gewichtszahlen nötig sein (Grundfläche, Volumen), damit der Mittelwert bedeutender anstiege. Noch nicht einmal die biquadratische Stammzahlpotenzmittelhöhe $h_{N_{po_4}}$ (hier nicht eingezeichnet; vgl. Fig. 6 und weiter unten) erreicht die arithmetische Grundflächenmittelhöhe h_{G_1}.

Die mittleren Formzahlen sind ihrerseits in Fig. 10 und 11 in entsprechender Weise wie die mittleren Höhen in Fig. 8 und 9 veranschaulicht. Die hier dargestellten, speziell benannten statistischen Mittel für den ganzen Bestand sind die folgenden: f_{N_1}, f_{G_1} und $f_{V_{ha}}$, aus welchen das erste als Grundlage für die Differenzdarstellung in Fig. 11 dient. Ausserdem sind die aus Gleichung (17) abgeleiteten, durch wechselweise Einsetzung der mittleren Höhen: h_{N_1}, $h_{N_{po_2}}$, $h_{G_{ha}}$ und h_{V_1} erhaltenen mittleren Formzahlen: $f_{(h_{N_1})}$, $f_{(h_{N_{po_2}})}$, $f_{(h_{G_{ha}})}$ und $f_{(h_{V_1})}$ zur Abbildung gekommen (Fig. 11).[1]

Wie bekannt und wie auch schon erwähnt, ist die Rangordnung der Zahlenwerte der verschiedenen Formzahlmittel der Rangordnung der nach Gleichung (17) entsprechenden Höhenmittel entgegengesetzt. Je mehr die einzelnen Mittelhöhen also in die Höhe steigen, desto niedriger stellen sich die entsprechenden Formzahlwerte. Hinsichtlich der hier genommenen Grundformzahl f_{N_1} sind also auch eine Anzahl von den dargestellten anderen Formzahlen durch negative Differenzwerte gekennzeichnet. —

Betrachtet man ferner die Lagenkonstellationen sowohl in biologischer als in praktisch-technischer Hinsicht, in welche die hier mitgeteilten verschiedenen Bestandeshöhen- und -formzahlmittelwerte geraten sind, so kommt man zu folgenden Schlüssen.

Geht man von der Ansicht aus, dass das nächste Variationsgebiet um den mit der Variantenzahl gewogenen arithmetischen Mittelwert im allgemeinen die vorteilhafteste Mittelwertkombination sei (im Hinblick auf den recht regelmässigen Verlauf der in Frage stehenden Frequenzkurven kann man diese Annahme wohl machen), so steht von

[1] Die anderen in Fig. 11 vorgeführten, durch Strich-Punkt veranschaulichten mittleren Bestandesformzahlen werden weiter unten näher behandelt. — Zum Vergleich sind in dieser Figur ausserdem die mittleren Formzahlen für die Ober- und die Grundstämme dargestellt (f_O und f_U).

den hier untersuchten, auf Grund der Gleichung (17) berechneten Höhen-Formzahlkombinationen auf dem ersten Rangplatz vielleicht die Kombination (vgl. Fig. 9 und 11)

(a) $$f_{N_1} - - h_{(f\,N_1)}.$$

An zweiter Stelle (und dem erwähnten Paar (a) recht nahe) dürfte sich das Formelpaar

(b) $$h_{G_{ha}} - - f_{(h\,G_{ha})}$$

befinden. Ein wenig weiter ab, aber offenbar wohl zu den »typischen» Variantenwerten gehörend, stehen die Komponenten der zwei oben vorgeführten schönen Formelpaare

(c) $$h_{V_{ha}} - - f_{G_1}$$
und
(d) $$h_{G_1} - - f_{V_{ha}}.$$

Als die unvorteilhaftesten der auf Grund von Gleichung (17) berechneten Formelpaare wären schliesslich die Paare

(e) $$h_{N_1} - - f_{(h\,N_1)},$$
(f) $$h_{N_{po_2}} - - f_{(h_{N_{po_2}})}$$
und
(g) $$h_{V_1} - - f_{(h\,V_1)}$$

zu bezeichnen. [1]

Zieht man zur Beurteilung der in Frage stehenden Angemessenheit der verschiedenen vorgeführten Formelpaare nur die Lagenrelativität hinsichtlich des gegenseitigen Verhaltens zwischen den zwei behandelten Paarkomponenten in Betracht, so verschärft sich das oben ausgesprochene Urteil.

Nach dieser Beurteilung müssen die drei letzterwähnten Mittelpaare ganz aus der Liste ausgeschaltet werden, — wenigstens soweit es sich um CT handelt. Wie nämlich zu bemerken, fallen alle drei in Frage

[1] Um die Figur 11 nicht ganz chaotisch zu machen, sind die Werte des zuletzterwähnten Formzahlmittels nur in das Bild des C-Typs, wo mehr Raum war, eingezeichnet.

stehenden Formzahlmittelwerte teilweise ausserhalb des von der mittleren Ober- und der mittleren Grundformzahl bestimmten Intervalls (beim C-Typ durchaus), die zwei ersten auf dessen positive und der dritte auf dessen negative Seite. Es scheint somit sehr unsicher zu sein, ob ein entsprechend qualifizierter Stamm (das Volumen, die Grundfläche und die Höhe in der Nähe von dem Vasallenmittelstamm und die Formzahl entweder teils ausserhalb des Grundmittelstammes (e) und (f), oder des Obermittelstammes (g)) im Bestand in jedem Fall normaliter zu finden wäre. [1]

Was die vier übrigen Formelpaare betrifft, ist leicht zu konstatieren, dass die hier anfangs entwickelten Paare (c) und (d) hinsichtlich der zwei Komponenten ausserordentlich egal liegen, also mit kaum merkbarem Unterschied in der relativen Lage (Fig. 9 und 11). Dagegen sind ja die Paare (a) und (b) in dieser Hinsicht nicht so gut orientiert.

Betrachtet man diese vier Paare weiter auf die schon oben berührte Selbständigkeit der gegenseitigen Paarkomponenten hin, so können das (a)- und das (b)-Paar in der Formelkonkurrenz nicht mehr in Frage kommen. In dem (a)-Paar ist ja der h- und in dem (b)-Paar der f-Wert erst nach Kenntnis des entsprechenden f- bzw. des h-Wertes zu berechnen, wogegen das (c)- und das (d)-Paar in betreff der Komponenten in der fraglichen Hinsicht selbständige Mittel zeigen.

Was zuletzt die Gesamtanordnung der erhaltenen Charakteristikummittel (11), (14), (15) und Formelpaare (c) oder (d) mit bezug auf die Stammvariation innerhalb des Bestandes im Zusammenhang mit den oben vorgelegten speziellen Bedingungen der Lösung des stereometrischen Bestandesmittelstammes anbelangt, so sei folgendes angeführt.

Das mit der Stammzahl gewogene geometrische Mittel dürfte das einzige Mittel sein, welches das S. 6 angeführte erste leitende Prinzip zur Lösung des stereometrischen Mittelstammes erfüllt. Lässt man

[1] Vgl. hier die Kontroversen, die sich darüber entsponnen haben, dass v. BAUR und FLURY gerade die Anwendung des h_{N_1}-Mittels bei derMittelstammcharakterisierung auf Grund von Gleichung (17) anstelle des von v. LOREY vorgeführten h_{G_1}-Mittels empfehlen. v. BAUR (1882, S. 554—555), v. LOREY (1883, 1901), FLURY (1898, S. 122—125), LEVAKOVIĆ (1922, S. 34 ff.).

FR. V. BAUR, Zur Lehre von der mittleren Bestandeshöhe. Forstwiss. Cbl.

T. V. LOREY, l. c.

PH. FLURY, l. c.

A. LEVAKOVIĆ, l. c.

also dieses Mittel beiseite und versucht auf anderem Wege eine Mittelstammlösung aufzufinden, — wie es also in diesem Abschnitt der vorliegenden Studie geschehen ist —, so dürfte daraus sofort folgen, dass eine solche Lösung nur durch untereinander *ungleichwertige* statistische Charakteristikummittel durchgeführt werden kann.

So ordnen sich z. B. die in dem jetzigen Abschnitt vorgeführten kombinierten Mittel, wie sich auch schon gezeigt hat, natürlicherweise nicht im einzelnen in gleicher Weise in die bezüglichen Charakteristikumvariationsintervalle ein.

An sich ist dies jedoch noch nicht von ausschlaggebender Bedeutung. Die relative Einordnung der Mittelwerte in die Variationsintervalle wird nämlich auch von mehreren anderen Momenten als dem erwähnten theoretischen beeinflusst, unter deren Einwirkung auch die Akkommodierung des besprochenen geometrischen Mittels steht. So sind z. B. die fraglichen Charakteristika in biologischer Hinsicht ungleich gewogen, woraus folgt, dass die in Rede stehenden Variationsformen sich in Beziehung zueinander verschieden ausbilden. Gleich sind die erwähnten Charakteristika auch nicht in rein mathematischer Hinsicht bei der Berechnung des Mittelstammes, obgleich sie durch ein und dasselbe Mittel gelöst werden können. Weiter ist die Mittelwertungleichwertigkeit in betreff verschiedener Bestände von den verschiedenen Standorts- wie den Bestandesbonitäten, der Holzart, dem Bestandesalter etc. bedingt (vgl. z. B. die Figuren). — Alles in allem ist eine gewisse Verschiedenwertigkeit der fraglichen Mittelwerte in keinem Fall zu vermeiden.

Ist denn eine solche Sachlage bei der vorgelegten Aufgabe nachteilig? Keineswegs.

Abgesehen davon nämlich, dass es, wie ersichtlich, keine Schwierigkeiten bietet, die gestellte Aufgabe durch vollcharakterisierte und benannte Mittel theoretisch zu lösen, ist ja bekanntlich die koordinierte Variation zwischen den verschiedenen in Frage kommenden Stammcharakteristika speziell im Optimumgebiet der Variation verhältnismässig sehr reich und, wie hier aus den Figuren ersichtlich ist (von Fig. 7 beginnend), in betreff der besprochenen Verschiedenwertigkeit der einzelnen Charakteristikummittel normalerweise übergenug ausreichend. [1]

[1] Nehmen wir z. B. einen Alternsbestand MT, so beträgt die Höhenvariation in dem fraglichen Optimumgebiet in betreff eines bestimmten Mitteldurchmessers ca. 6 m. Aus Fig. 9 sieht man dementsprechend, dass die fraglichen $h_{V_{ha}}$- und h_{G_1}-Mittel-

Die in diesem Abschnitt speziell in Betracht kommenden zwei Lösungen des stereometrischen Mittelstammes sind mithin in der Sache wohl gültig. [1]

Auf Grund alles dessen, was sich hier ergeben hat, dürfte man die weiter oben vorgeführte Ansicht aufs neue aussprechen können, die nämlich, dass die *Formelpaare* (c) *und* (d) — *also im Hinblick auf Gleichung* (17) — *die bestmöglichen exakten diesbezüglichen Mittelkombinationen sein dürften.*

Die Sache ist jedoch hiermit nicht in jeder Hinsicht erledigt. Es bleibt nämlich noch zu prüfen, wie sich die zwei gewählten Formelpaare zu der praktischen Bestimmung der Mittelwerte der zwei in Frage stehenden Charakteristika verhalten.

In dieser Hinsicht stellt sich sogleich heraus, dass das in den beiden Formelpaaren auftretende Volumgewichtscharakteristikum die praktische Bestimmung des Mittelstammes grundsätzlich erschwert. Bei einer *exakten* Lösung des Mittelstammproblems dürfte hiergegen jedoch — von der durchgehenden Akkommodierung des weiter oben besprochenen geometrischen Mittels abgesehen — nichts zu machen sein.

Anders verhält es sich indes mit den *annähernden* Lösungen. Hier steht ein aussergewöhnlich guter Ausweg zur Verfügung. Er

werte um + 1 m von dem Wert h_{N_1} differieren. Angenommen, dass der zuletzterwähnte Mittelwert etwa in der Mitte der Höhenvariation liege, haben die zwei gewählten Höhenmittel sich nur um ein Drittel des Hälftespielraums von dem Zentrumwert entfernt. (Die von W. NEUBAUER (1925, S. 11—12, l. c.) als »übernormale» Höhe bezeichnete Höhe h_{G_1} v. LOREY's ist also zu den »typischen» Mittelhöhen zu rechnen.) Analog stehen die entsprechenden Formzahlen nur um einige Tausendstel von der angenommenen Optimumwert f_{N_1} seitwärts (Fig. 11). Sowohl die fraglichen Höhen- wie die Formzahlmittelwerte befinden sich zwischen den m_{N_1}- und m_o- (Oberhöhen-) Werten. — Vgl. auch S. 12—13 Fussnote, und z. B. A. LEVAKOVIĆ (1922, S. 10 ff., l. c.).

[1] Im Hinblick auf alles hier und in dem vorhergehenden Abschnitt Gesagte ist der in der fraglichen Literatur oft hervorgehobene prinzipielle Unterschied zwischen dem »Volummittelstamm» und dem »Grundflächenmittelstamm» für die Frage des Bestandesmittelstammes in seiner Gesamtheit eine Fiktion. Eine solche Unterscheidung ist sowohl in bezug auf die innere biologische Struktur des Bestandes wie auf die mathematisch-statistischen Prinzipien zur Lösung der vorliegenden Aufgabe überhaupt ungeeignet. — Dasselbe gilt von der Anschauung, dass der stereometrische Bestandesmittelstamm durch Werte, die nicht als Bestandesmittelwerte angegeben sind, charakterisiert werden könnte. (Vgl. S. 4 Fussnote 1.)

ergibt sich aus der hier gefundenen gegenseitigen, fast genauen Übereinstimmung der Ergebnisse der zwei Mittelwertformeln m_{G_1} und $m_{V_{ha}}$ sowohl in betreff der Höhe wie der Formzahl, — natürlich abgesehen von derjenigen Altersperiode, innerhalb deren Baumindividuen unter Brusthöhe zahlreicher auftreten und wo somit m_{G_1} nicht signifikant ist. Vgl. Fig. 9 und 11.[1]

Nimmt man demgemäss eine Substitution in den in Frage stehenden Formelpaaren vor, indem man anstatt $m_{V_{ha}}$ das Mittel m_{G_1} setzt, so erhält man aus den beiden Paaren die neue Kombination

$$(h) \qquad h_{G_1} - - f_{G_1}, \qquad \text{(appr.)}$$

die ausser dem, dass durch sie die Gewichtszahlfrage glücklich gelöst ist, nur das als allereinfachstes Mittel angesehene arithmetische Mittel enthält.

Somit wird einerseits die Volumgewichtszahl auch hier aus der Lösung des stereometrischen Mittelstammes eliminiert, wodurch auch die vorgängige Kenntnis des Bestandesvolumens, worüber anfänglich eine Grundannahme zu machen war (vgl. S. 12), nicht mehr direkt notwendig ist.[2] Und zweitens wird die Gesamtlösung des stereometrischen Mittelstammes (wenn der Durchmesser aus der Grundfläche berechnet und primär ausser Acht gelassen wird) ausschliesslich mittels arithmetischer Mittel durchgeführt. Die bezüglichen Gewichtscharakteristika sind endlich auch nur zwei, nämlich

[1] Die Differenz zwischen den zwei verschiedenen Bestandesmittelhöhen h_{G_1} und $h_{V_{ha}}$ beträgt in dem hier ausgeglichenen Bestandesmaterial (die bedeutsame Wachstumsperiode hindurch) nur etwa $^1/_2$ dm und die entsprechende Formzahldifferenz 0,001. Für die verschiedenen Waldtypen war diese kleine Differenz stets von der Art $m_{G_1} > m_{V_{ha}}$. — Die in jeder Hinsicht ausgezeichnete Gleichmässigkeit der Differenzen war auffällig.

Die praktisch betrachtet fast volle Identität der Mittelwertserien m_{G_1} und $m_{V_{ha}}$ ist übrigens ein interessanter Fall in der Hinsicht, dass die grössere Kraft der Gewichtszahl des einen Mittels durch die höhere statistische Qualität des anderen Mittels so gut wie vollständig aufgewogen wird.

Vgl. auch A. LEVAKOVIĆ (1922, S. 33—34, l. c.).

[2] Im Mittelstamm-Begriff ist natürlich weiterhin die prinzipielle Kenntnis der Probestammvolumina im Zusammenhang mit der Bestimmung des f-Charakteristikums enthalten.

die Stammzahl und die vielfache Grundfläche.[1] — Vgl. auch SCHIFFEL (1900, S. 295).[2]

Das hier gewonnene Resultat steht im Einklang mit dem Gedanken, den seinerzeit schon v. LOREY geäussert hat, als er seine beiden, hier erwähnten Höhenformeln $h_{V_{ha}}$ und h_{G_1} entwickelte (1878, 1883).[3]

Dass dagegen v. LOREY's Anschauung von seiner h_{G_1}-Formel, dass diese als ein durch nur annähernde Gültigkeit gekennzeichneter Spezialfall der angeblich einzig richtigen Höhenformel $h_{V_{ha}}$ anzusehen sei, in der jetzt behandelten Frage nicht sachgemäss ist, ist schon aus dem Obigen klar geworden. Da sich dieser Gedanke v. LOREY's jedoch allgemein behauptet hat (vgl. hierüber MÜLLER 1923, S. 272; v. GUTTENBERG—MÜLLER 1926, S. 144—145, u. a.), dürfte es angebracht sein, der Sache hier noch einige Worte zu widmen.[4]

v. LOREY entwickelte seine Formel (23) aus der Formel (20 b) in der Weise, dass er die Formzahl konstant machte.[5] Aus den vorhergehen-

[1] Eine weitere annähernde, aber im ganzen nicht so vorteilhafte Lösung wie die obenangeführte wäre die, die man aus der Vereinigung der einander ziemlich nahestehenden Formelpaare (a) und (b) erhält. Hinsichtlich der Höhe und der Formzahl wäre die aufzustellende Kombination von folgender Form:

$$(i) \qquad h_{G_{ha}} - - f_{N_1}. \qquad \text{(appr.)}$$

Vgl. Fig. 9 und 11.

[2] A. SCHIFFEL, l. c.

[3] T. v. LOREY, l. c.

[4] U. MÜLLER, l. c.

A. R. VON GUTTENBERG—U. MÜLLER, Holzmesskunde. T. v. LOREY—H. WEBER, Handbuch der Forstwissenschaft, Bd. III. 4. Aufl. Tübingen.

[5] Das Verfahren v. LOREY's war, wie bekannt, das folgende:

$$h_{V_{ha}} = \frac{\Sigma V}{\Sigma \frac{V}{h}} = \frac{\Sigma hfG}{\Sigma \frac{hfG}{h}}.$$

Wird hier f zur Konstante gemacht und danach abgekürzt sowie im Nenner noch h ebenso gekürzt, so erhält man

$$\frac{\Sigma hG}{\Sigma G},$$

was $= h_{G_1}$ ist.

den Darlegungen ersieht man jedoch, dass die Formel (23) direkt aus der Grundformel (17) hervorgeht, wenn das f_m-Charakteristikum durch die Formel (22) bestimmt wird. Bleibt man also auf der Grundlage der Formel (17) und lässt man die mit dem Grundflächengewichtscharakteristikum unvereinbare erste Wachstumsperiode ausser Acht, so ist das Formzahlmittel $f_{V_{ha}}$ die einzige theoretische Voraussetzung des Höhenmittels h_{G_1}, welche Voraussetzung ihrerseits somit keineswegs Konstanz des f-Charakteristikums voraussetzt. Der Umstand, dass man h_{G_1} auch durch die von v. LOREY vorgenommene inkorrekte Zwangsherleitung erhalten kann, hat also nichts mit der sachlichen Bildung dieses Höhenmittels zu tun.[1]

* * *

Noch andere derartige Vorschläge zur Lösung des stereometrischen Mittelstammes können natürlich fortwährend gemacht werden. Einige weitere solche sind ja auch aus der Literatur bekannt.

So hat man teils von der mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen mittleren Grundfläche (Formel (14)) Abstand genommen, wenngleich das entsprechende Mittel bei der Berechnung des mittleren Volumens zur Anwendung gekommen ist (Formel (11)), und teils hat man umgekehrt das erwähnte Volummittel beiseite gelassen und die Lösung des Bestandesmittelstammes speziell in dieser Hinsicht in neue Wege zu lenken versucht. In beiden Fällen laufen die vorgeschlagenen statistischen Mittel auf grössere Mittelwerte als das mit der Stammzahl gewogene arithmetische Mittel hinaus und bezwecken somit wenigstens nicht eine Lösung im Sinne des oben angeführten ersten diesbezüglichen leitenden Prinzips, die allein durch das mit der Stammzahl gewogene geometrische, also durch ein im Verhältnis zu dem entsprechenden arithmetischen Mittel kleineres Mittel durchzuführen sein dürfte. Vgl. S. 6—11. —

[1] Mehrere andere entsprechende zwangsweise Herleitungen, die Anlass zu ähnlichen Schlüssen geben, können aus der älteren sowie aus der neueren Literatur angeführt werden. So sind z. B. die in vorliegender Untersuchung angeführten Formeln (14), (20), (21), (22), (24), (27), (29) (siehe weiter unten) in verschiedenem Zusammenhang auf solche Weise hergeleitet worden. Auch durch allgemeinere Identifizierungen oder Nebeneinanderstellungen verschiedenwertiger statistischer Mittel sind in diesbezüglichen Formelherleitungen in einigen Fällen entsprechendweise Trugschlüsse gemacht worden.

In ersterwähnter Hinsicht sind WEISE (1880, S. 10 Fussnote) und KUNZE (1883, S. 5; 1916, S. 24 ff.; etc.) zu nennen. Speziell weil KUNZE in dieser Beziehung noch Anhänger gefunden hat (vgl. z. B. MÜLLER 1923, S. 270), kann es angebracht sein, auch diese Seite der Sache näher zu beleuchten.[1 2]

Sowohl WEISE wie KUNZE verwendeten ein mit der Stammzahl gewogenes Potenzmittel bei der Bestimmung des Durchmessers bzw. der Grundfläche, — also wie auch weiter oben bei den Formeln (15) und (14) vorausgesetzt war. Die Gradhöhe des Mittels war nur eine andere.[3] Die angewandten Formeln waren:[4]

$$(28\,a)\qquad d_{N_{po_3}} = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3 N}{\Sigma N}}, \qquad (\text{WEISE.})$$

$$(28\,b)\qquad = \sqrt[3]{d_{N_1}^3 + 3\, d_{N_1} v_2 + v_3}\,;^{5}$$

$$(29)\qquad g_{N_{po_2}} = \sqrt{\frac{\Sigma g^2 N}{\Sigma N}} \qquad (\text{KUNZE.})$$

$$(30\,a)\qquad d_{N_{po_4}} = 2\sqrt{\frac{g_{N_{po_2}}}{\pi}}$$

$$(30\,b)\qquad d_{N_{po_4}} = \sqrt[4]{\frac{\Sigma d^4 N}{\Sigma N}}, \qquad (\text{KUNZE.})$$

$$(30\,c)\qquad = \sqrt[4]{d_{N_1}^4 + 6\, d_{N_1}^2 v_2 + 4\, d_{N_1} v_3 + v_4}.^{5}$$

[1] W. WEISE, l. c.
M. FR. KUNZE, l. c.
U. MÜLLER, l. c.

[2] Die S. 18 Fussnote angegebene Formelkombination (IX), wo in Gleichung (14) in gewissen Fällen eine Charakteristikumvertauschung stattgefunden hat, ist nicht mit den jetzigen Fällen direkt vergleichbar und ist übrigens auch schon da zur Besprechung gekommen.

[3] Die Gesamtformel der Potenzmittel wird in folgender allgemeingültigen Weise geschrieben:

$$(\text{X})\qquad m_{po_s} = \sqrt[s]{\frac{\Sigma x^s N}{\Sigma N}}.$$

Vgl. E. LÖNNROTH (1925, S. 100—101 Fussnote, l. c.).

[4] Sowohl WEISE wie KUNZE hielten ihre Formeln jedoch für einigermassen von zu hohem Grade.

[5] In diesen Formeln vertreten die v-Werte die relativen Momente um das mit der Stammzahl gewogene arithmetische Durchmessermittel.

(Forts. auf folgender Seite.)

Gegen WEISE's und KUNZE's Mitteldurchmesserberechnungen lässt sich vom allgemeinen theoretischen Mittelwertstandpunkt aus nichts einwenden, und auch nichts gegen die Willkür, die man sich im Rahmen der oben auseinandergesetzten biologischen Einschränkungen hinsichtlich der Durchmessermittelwerte allein gestatten darf (siehe näher unten). Was aber die anderen Grundlagen betrifft, die oben näher erwogen worden sind, wie die möglichst gleichwertige und einfache Bestimmung der ganzen Mittelwertreihe, so ist ebenfalls auf Grund des Obigen ohne weiteres klar, dass diese erwähnten Durchmessermittel geeignet sind, die Lösungen im Vergleich zu den oben erhaltenen und empfohlenen Mittelkombinationen wenigstens teilweise ungünstig zu gestalten.

Um die Konstellationen, zu denen diese Stärkenmittel in der Lösung des Bestandesmittelstammes auf Grund der Gleichung (11) führen, deutlicher hervortreten zu lassen, sind erstens die diesen Potenzmitteln entsprechenden Durchmesserwerte in Fig. 6 und 7 veranschaulicht [1] und zweitens die diese nebst den mittleren Höhenwerten h_{N_1} oder den Werten $h_{N_{po_2}}$ ergänzenden Formzahlwerte in Fig. 11 zum Studium vorgelegt. Fasst man die erhaltenen Zahlenwerte etwas näher ins Auge, so sieht man, dass erstens die $d_{N_{po_3}}$- und $d_{N_{po_4}}$-Werte an sich hinsichtlich des ganzen Durchmesservariationsintervalls noch nicht besonders weit von dem angenommenen Optimum d_{N_1} abrücken (Fig. 6 und 7). Anders verhält es sich dagegen, abgesehen von einem Fall, mit den entsprechenden mittleren Formzahlwerten.

Die relativen Momente um das arithmetische Mittel werden in allgemeingültiger Weise durch folgende Formel berechnet:

$$\nu_s = \frac{\Sigma (x - m_1)^s N}{\Sigma N}. \tag{XI}$$

ν_2, das zweite diesbezügliche Moment, ist gleich dem Quadrat der hier früher erwähnten Dispersion σ (vgl. S. 14 Fussnote).

Die vorgeführten Hilfsformeln für das oben erwähnte kubische und das biquadratische Potenzmittel sind vom Verfasser als Erleichterungsformeln entwickelt. Die fraglichen Mittelwerte werden nämlich ausserordentlich viel bequemer direkt aus den ausgeglichenen Momentenwerten als durch die entsprechenden umständlichen Klassenfrequenzbestimmungen berechnet. — Wegen der Herleitung dieser Hilfsformeln wie auch der anderen in Frage stehenden Umstände vgl. E. LÖNNROTH (1925, S. 211—213 usw., l. c.).

[1] Es ist nicht notwendig erschienen, die fraglichen entsprechenden Grundflächenmittelwerte hier graphisch zu veranschaulichen.

Obgleich nämlich für den Durchmesser $d_{N_{po_3}}$ zum Komponenten die mittlere Höhe h_{N_1} genommen wird, stellt sich die entsprechende Formzahl bei dem M- und dem V-Typ recht niedrig, ja teils sogar ausserhalb der mittleren Oberformzahl (Fig. 11). Nur bei dem C-Typ ist die Lage relativ gut, in den Alternsbeständen sogar ausgezeichnet. [1] Dieser eine Fall kann jedoch nicht den im allgemeinen ungünstigen Eindruck grundsätzlich mildern, den die zwei anderen Typen betreffs dieser Kombination geben. — Wie aus Fig. 11 noch zu ersehen ist, würde übrigens ein bestimmtes d_m-Mittel, das zwischen $d_{N_{po_2}}$ und $d_{N_{po_3}}$ läge, in Kombination mit h_{N_1} zu den f_{N_1}-Werten führen. Dies hat schon WEISE, wie gesagt, seinerzeit gefunden (1880, S. 10 Fussnote). [2] Dieser d_m-Wert variiert jedoch auch nach Waldtyp, Bestandesalter usw. und kann auch nicht durch ein speziell benanntes Mittel vertreten werden.

Was zweitens die den KUNZE'schen mittleren Durchmesserwerten $d_{N_{po_4}}$ entsprechenden Formzahlwerte anbelangt, ist es natürlich, dass sie sich noch ungünstiger verhalten als die das oben behandelte $d_{N_{po_3}}$ — — h_{N_1}-Paar ergänzenden Formzahlwerte.

Wie aus Fig. 11 zu ersehen, sinken die diesbezüglichen Formzahlwerte schon in Verbindung mit den Höhenwerten h_{N_1} sogar bedeutend unter die mittlere Oberformzahlkurve, so dass es sehr wahrscheinlich ist, dass ihnen entsprechende Werte im Bestande überhaupt nicht vorhanden sind. Noch schlechter werden die Formzahlergebnisse, wenn die Höhenwerte nach KUNZE's weiterem Vorschlag zur Höhe des quadratischen Potenzmittels $h_{N_{po_2}}$ erhoben werden. Zu welchen vollständigen Unmöglichkeiten diese Kombination in der Tat führt, geht aus Fig. 11 ganz unstreitig hervor. — Vgl. auch z. B. LEVAKOVIĆ (1922, S. 99—100). [3] —

Die jetzt behandelten Mittelwertkombinationen haben im allgemeinen schon an sich zu mehr oder weniger ungünstigen Totalergebnissen geführt. Zieht man hierzu in Betracht, dass entweder der Höhen- oder der Formzahlmittelwert hier als Hilfswert zu berechnen ist und dabei kein selbständiges statistisches Mittel vertritt, so wird klar, dass keine von den hier vorgeführten Mittelwertzusammenstellungen den oben an-

[1] Über die diesbezüglichen Verschiedenheiten zwischen den einzelnen Waldtypen siehe näher E. LÖNNROTH (1925, S. 154 ff., l. c.).

[2] W. WEISE, l. c.

[3] A. LEVAKOVIĆ, l. c.

geführten gleichzeitigen Forderungen von biologischer Gültigkeit, Formeleinfachheit und theoretisch bindender Zusammenwirkung genügt. — Bessere Ergebnisse dürften auch die sonstigen derartigen Mittelwertkombinationen nicht liefern.

Das zweiterwähnte Verfahren, das, welches das Volumen des Mittelstammes weder durch die Formel (2) noch durch (11) zu lösen beabsichtigt, dürfte auch nicht zu irgendwelchen vorteilhafteren Allgemeingesamtlösungen des stereometrischen Mittelstammes führen. Theoretisch ist natürlich auch gegen alle solche möglichen Vorschläge nichts anzumerken, soweit sie nur mit entsprechend qualifizierten ergänzenden Charakteristikummitteln in Verbindung stehen, — aber wie gut sie die oben angeführten anderen Bedingungen erfüllen, ist eine andere Frage. Wenigstens nach der Ansicht des Verf. scheint dies bei Anwendung solcher Volummittel nicht in genügendem Masse der Fall zu sein.

Weil jedenfalls ein bestimmter Vorschlag in der hier berührten Richtung gemacht worden ist, sei gerade dieser Fall noch einer kurzen Prüfung mit Rücksicht auf die vorliegende Untersuchungsaufgabe unterworfen. —

NEUBAUER (1924—1925)[1] empfiehlt für die Bestimmung des Mittelstammvolumens das von ihm so genannte »zentrale Massenmittel», für welches er folgende Formel vorschlägt (1924, S. 114; 1925, S. 19):

(31 a) $$v = \frac{\Sigma v^2 N}{\Sigma v N}.$$ (NEUBAUER.)

Wie ersichtlich, ist dieses (Formel-) Mittel das mit der Stammzahl gewogene eigentliche (quadratische) antiharmonische Volummittel $v_{N_{ah_2}}$.

Die allgemeine Gesamtformel der antiharmonischen Mittel kann mit den hier benutzten Bezeichnungen geschrieben werden

(XII a) $$m_{ah_s} = \frac{\Sigma x^s N}{\Sigma x^{s-1} N}.$$

Die entsprechende Formel der Potenzmittel wurde, wie erwähnt, ihrerseits in folgender Form gegeben (vgl. S. 29 Fussnote 3):

[1] W. NEUBAUER, l. c.

(X) $$m_{po_s} = \sqrt[s]{\frac{\Sigma x^s N}{\Sigma N}}.$$

Hieraus folgt, dass die Formel der antiharmonischen Mittel auch durch Potenzmittel ausgedrückt werden kann, und zwar auf folgende Weise:

(XII b) $$m_{ah_s} = \frac{m_{po_s}^{s}}{m_{po_{s-1}}^{s-1}}.$$

Folglich kann auch das eigentliche (quadratische) antiharmonische Mittel durch folgende Formel dargestellt werden:

(XIII a) $$m_{ah_2} = \frac{m_{po_2}^{2}}{m_1}.$$

Substituiert man hier das in dem rechten Glied der Gleichung vorkommende quadratische Potenzmittel m_{po_2} durch die OPPERMANN'sche Hilfsformel (vgl. S. 14 Fussnote), so erhält man nach Entwicklung die Formel

(XIII b) $$m_{ah_2} = m_1 + \frac{\sigma^2}{m_1},$$

welche also mit den angewandten Volumbezeichnungen etc. die Form

(31 b) $$v_{N_{ah_2}} = v_{N_1} + \frac{\sigma_v^2}{v_{N_1}}$$

annimmt. — Aus dieser Gleichung geht hervor, dass $v_{N_{ah_2}}$ im allgemeinen merklich grösser als das oben vorgeschlagene Mittel v_{N_1} ist.[1 2]

[1] Dass m_{ah_2} auch $> m_{po_2}$ ist, geht aus der zweitvorletzten Gleichung ohne weiteres hervor, weil $m_{po_2} > m_1$ ist. Dass aber im allgemeinen noch $m_{ah_2} > m_{po_3}$ ist, lässt sich folgendermassen zeigen:

$$m_{ah_2} \neq m_{po_3}.$$

Durch Substitution der Formel (XIII b) und der Allgemeingleichung aus der Formel (28 b) erhält man, da $\sigma^2 = \nu_2$

$$m_1 + \frac{\sigma^2}{m_1} \neq \sqrt[3]{m_1^3 + 3\, m_1 \sigma^2 + \nu_3}$$

und nach Kubierung weiter

$$m_1^3 + 3\, m_1 \sigma^2 + \frac{3\,\sigma^4}{m_1} + \frac{\sigma^6}{m_1^3} \neq m_1^3 + 3\, m_1 \sigma^2 + \nu_3.$$

(Forts.)

Aus den zwei vorhergehenden Abschnitten dieser Untersuchung ist schon klar geworden, teils, dass das mit der Stammzahl gewogene geometrische Mittel das Mittel ist, welches die Forderung eines gemeinsamen Mittels für die fünf Hauptcharakteristika des stereometrischen Mittelstammes erfüllt, und teils, dass die Anwendung des mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen Mittels auf das Volumen eine Erhöhung von wenigstens einem der übrigen Charakteristikummittelwerte über diesen selben, d. h. über den mit der Stammzahl gewogenen arithmetischen Mittelwert zur Folge hat.

Geht man auf diesem Weg noch weiter, d. h. verschiebt man das Volummittel noch über das besprochene arithmetische Mittel hinaus, so folgt daraus weiterhin, dass die erwähnte ergänzende Erhöhung der anderen bezüglichen Charakteristika in entsprechend verschärftem Grade geschehen muss.

Weil im allgemeinen

$$\frac{3\sigma^4}{m_1} + \frac{\sigma^6}{m_1^3} > \nu'_3$$

ist, so hat man auch im allgemeinen die Ungleichung

$$m_{ah_2} > m_{po_3}.$$

— Da im normalen Naturbestand σ_v durch eine beachtenswerte Weite gekennzeichnet ist (vgl. schon Fig. 1), erreicht der Unterschied zwischen $v_{N_{ah_2}}$ und v_{N_1} in der Tat auch eine nennenswerte Grösse.

[2] Auch das mit der Stammzahl gewogene quadratische Potenzmittel hat W. NEUBAUER (1925, S. 20, l. c.) bei der Volummittelwertberechnung angeführt

$$v_{N_{po_2}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2 N}{\Sigma N}}, \qquad \text{(NEUBAUER.)} \tag{32 a}$$

in bezug worauf folgende Ungleichung bzw. Gleichung auf Grund des Obigen besteht (vgl. auch A. MESSEDAGLIA 1880, S. 394, 402 (französisch), l. c.):

$$v_{N_{ah_2}} \geqq v_{N_{po_2}} \geqq v_{N_1},$$

$$v_{N_{po_2}} = \sqrt{v_{N_1} v_{N_{ah_2}}}. \tag{32 b}$$

Von diesem Mittel gilt in der Hauptsache somit dasselbe, was von dem $v_{N_{ah_2}}$-Mittel gleich unten gesagt ist.

Da das vorgeschlagene quadratische antiharmonische Mittel, wie ersichtlich, gerade einen solchen Fall vertritt, hat es somit eine weitere unbequeme und unvorteilhafte Totallösung des Mittelstammes zur Folge, so dass die Prinzipien, deren Durchführung hier beabsichtigt wurde, wenigstens auf diese Weise nicht am vorteilhaftesten realisiert würden. Ausserdem gilt von diesem Volummittel auch das auf S. 10—11 über das geometrische Volummittel Gesagte.

Dasselbe trifft in der jetzt behandelten Hinsicht für die sonstigen derartigen Volummittel zu.

* * *

Aus allem Obigen dürften folgende Hauptschlussfolgerungen gezogen werden können:

1) eine in rein theoretischer, mathematisch-statistischer Hinsicht vollkommene, exakte, praktisch aber weniger angemessene Lösung des stereometrischen Bestandesmittelstammes ist die durchgehende Lösung durch das mit der Stammzahl gewogene geometrische Mittel

$$v_{N_{ge}} - - g_{N_{ge}} - - d_{N_{ge}} - - h_{N_{ge}} - - f_{N_{ge}}; \tag{A}$$

2) zwei weitere schöne, theoretisch exakte, für praktische Zwecke wenigstens in gewissen Hinsichten vorteilhafte Lösungen sind die Mittelkombinationen

$$v_{N_1} - - g_{N_1} - - d_{N_{po_2}} - - h_{V_{ha}} - - f_{G_1} \tag{B}$$

und

$$v_{N_1} - - g_{N_1} - - d_{N_{po_2}} - - h_{G_1} - - f_{V_{ha}}; \tag{C}$$

3) eine einfache, praktisch gute und im allgemeinen auch wohl hinreichend genaue Mittelstammbestimmung wird mittels eines Annäherungsverfahrens von folgender — abgesehen von dem mittleren Durchmesser — nur arithmetische Mittel umfassender Mittelkombination:

$$v_{N_1} - - g_{N_1} - - d_{N_{po_2}} - - h_{G_1} - - f_{G_1} \tag{D}$$

durchzuführen sein.

Fig. 1

Fig. 3

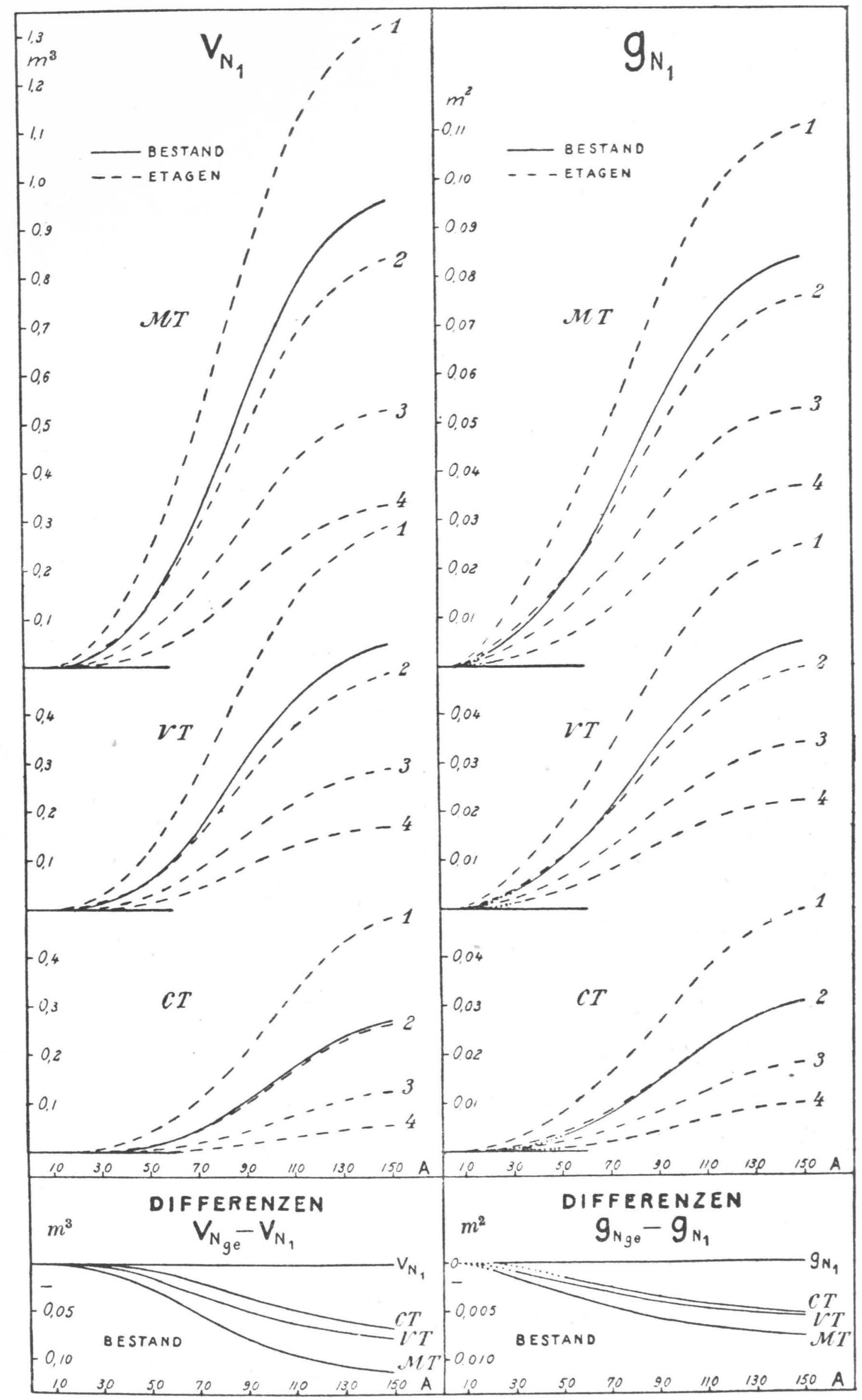


Fig. 2

Fig. 4

Fig. 5

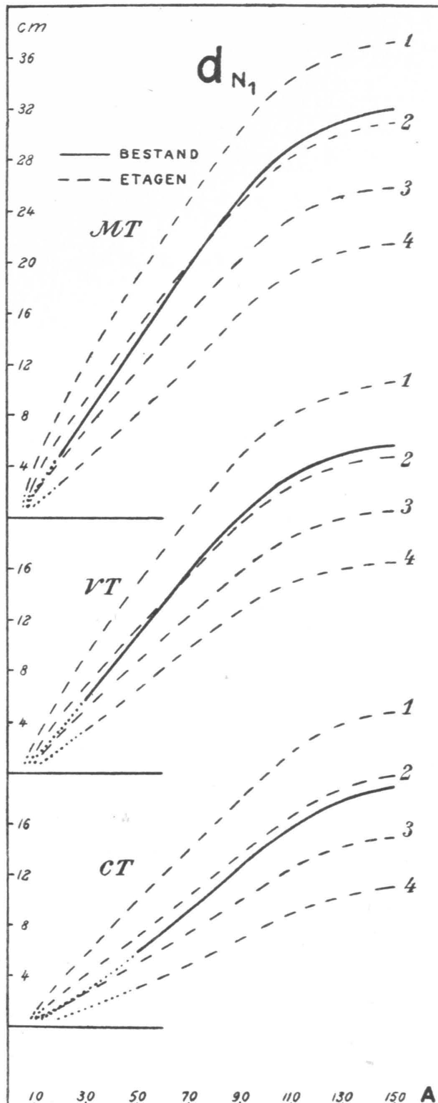
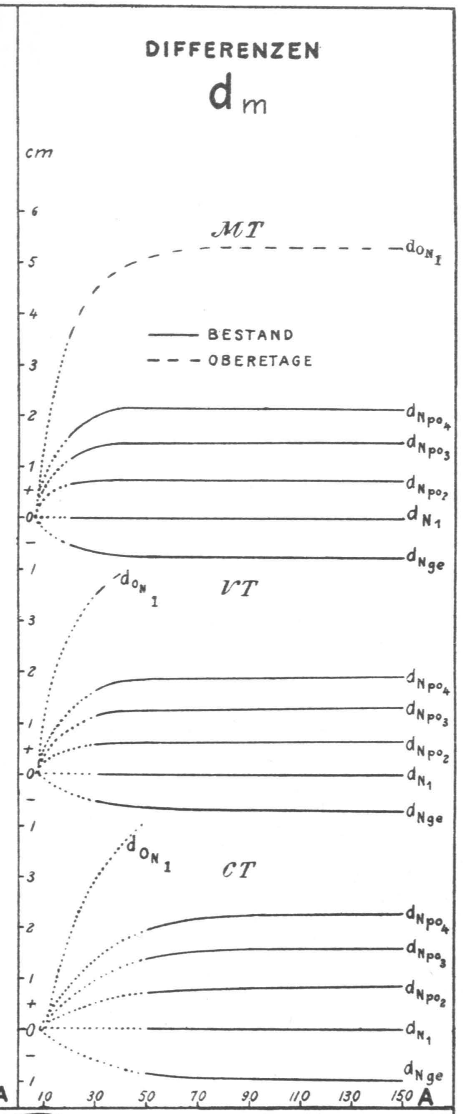


Fig. 6



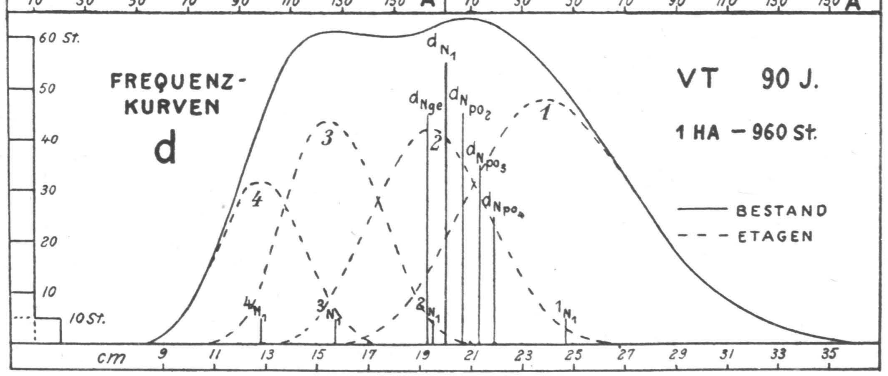


Fig. 7

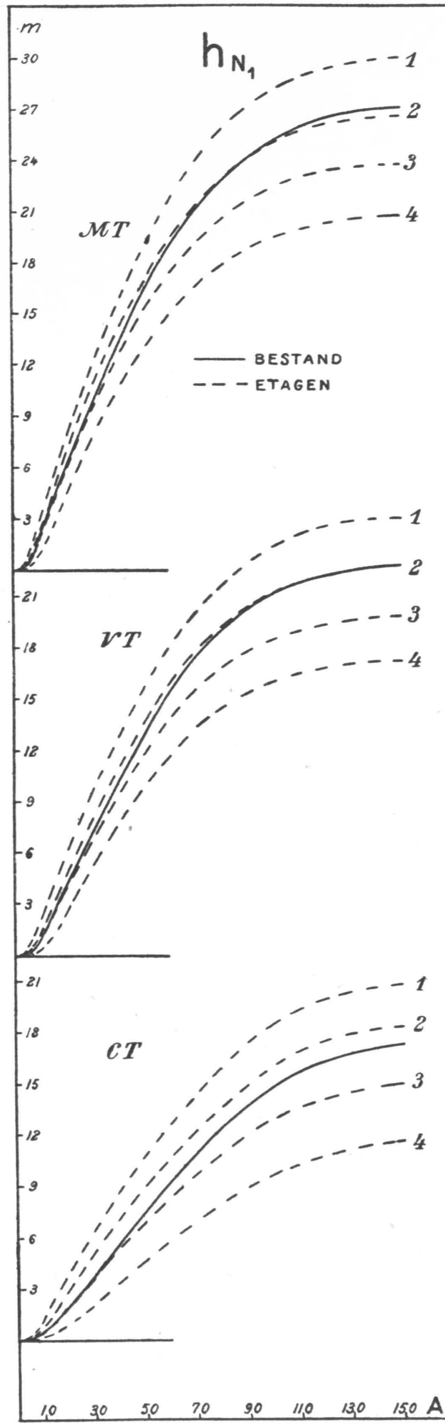

m
hN1
MT
VT
CT
BESTAND
ETAGEN
1
2
3
4
1,0 3,0 5,0 7,0 9,0 11,0 13,0 15,0 A

Fig. 8

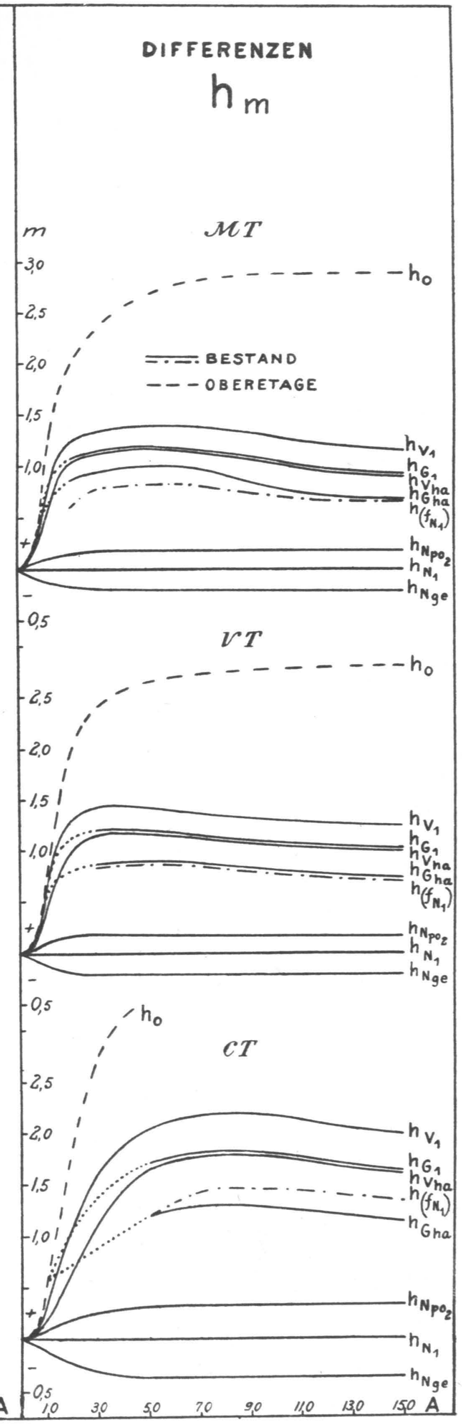

DIFFERENZEN
hm
m
MT
VT
CT
BESTAND
OBERETAGE
ho
hV1
hG1
hVha
hGha
h(fN1)
hNpo2
hN1
hNge
1,0 3,0 5,0 7,0 9,0 11,0 13,0 15,0 A

Fig. 9

Fig. 12

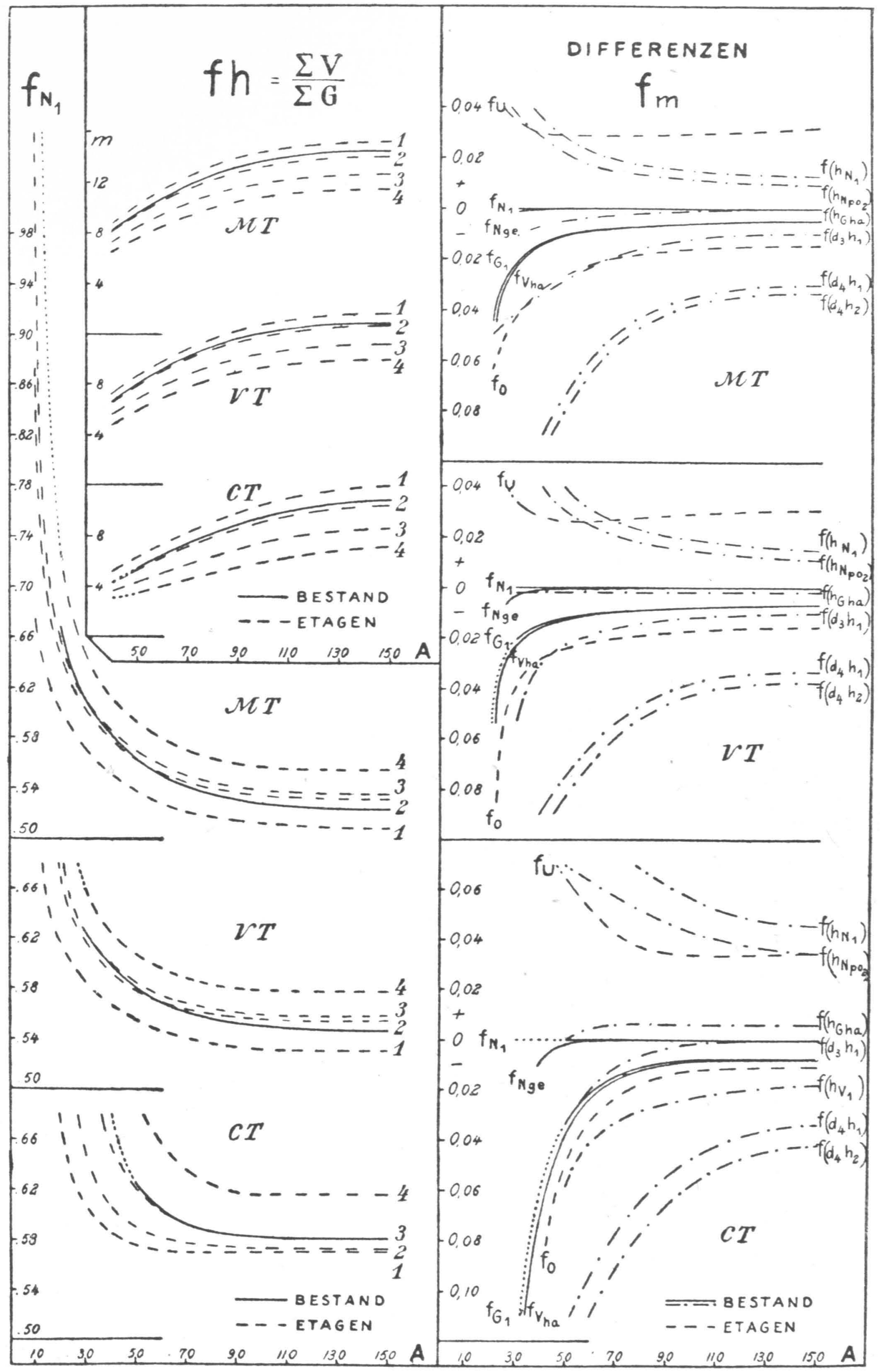


Fig. 10

Fig. 11