

ÜBER STAMMKUBIERUNGSFORMELN

VON

ERIK LÖNNROTH

HELSINKI 1927

Die Frage der Stammkubierungsformeln ist allerdings schon längst von den verschiedensten Seiten aufgeworfen und erörtert worden. Wenn sie hier trotzdem unter erneute Behandlung genommen wird, geschieht es in der Absicht, die Aufmerksamkeit auf noch einige erklärende Umstände zu lenken.

Sondervolumformeln für Baumstämme können einerseits durch direkte Versuche bzw. Berechnungen an natürlichem Stammaterial, dessen Kubikinhalte durch hinreichend genaue sektionsweise, xylometrische oder ähnliche Grundkubierungen von vornherein bekannt ist, und andererseits durch Vermittlung geeigneter, rein mathematisch formulierter Vergleichskörper aufgestellt werden.

Das Studium der Stammkubierungsfrage auf Grund allgemeiner mathematisch definierter Musterkörper kann, in zweckmässiger Form betrieben, den verschiedenen Volumformeln wenigstens eine einheitliche theoretisch begründete Zusammenfassung verleihen, die auch für die praktische Seite der Frage von Bedeutung ist. In der vorliegenden Studie ist, u. a. mit Rücksicht auf diesen Gesichtspunkt, die in Rede stehende Aufgabe in der fraglichen theoretischen Beziehung behandelt und begründet.

Die wirkliche Grundlage für die Stammkubierungsformeln bildet jedoch selbstverständlich immer nur der echte Baumstamm, der natürlich auch die Urbasis des fraglichen mathematisch formulierten Ersatzkörpers ist. Während aber der Ersatzkörper stets nur ein Vermittler ist, bietet das zweckmässig gewählte natürliche Stammaterial direkte Hinweise für die zu behandelnde und zu lösende Aufgabe dar. Im Hinblick hierauf ist das Studium im vorliegenden

durchgehends, mit prinzipieller Zielführung, primär auf ein echtes exemplifikatorisches Stammaterial bezogen worden.

Die beiden angeführten Verfahren für die Aufstellung von Stammkubierungsformeln sind folglich in dieser Untersuchung einander ergänzend berücksichtigt. —

Es wird hier nur mit Vollstämmen operiert.

In der Absicht, den Baumstamm mathematisch zu charakterisieren und zu definieren, hat man ihn allgemein als einen regelmässigen Rotationskörper betrachtet. Billigt man diese Anschauung, was wenigstens auf dem Gebiet der praktischen Stammkubierung geschehen kann, so wird das fragliche Volumen V bekanntlich durch die Formel

$$(1) \quad V = \frac{\pi}{4} \int_0^H D^2 da$$

gefunden, wo D ganz allgemein den Stammdurchmesser in der Höhe a von der Basalfläche des Stammkörpers und H die Stammhöhe bezeichnet.¹

In einer genauen Stammform spezialuntersuchung würde es nun von Belang sein, einen mit der tatsächlichen Baumstammkurve in genauer Übereinstimmung stehenden, für die Erzeugungskurve des Rotationskörpers geltenden mathematischen Ausdruck zu kennen. U. a. wegen der recht starken Asymmetrie der Stammkurve in betreff ihrer zwei durch den primären Inflexionspunkt abgetrennten Stammpartien kann ein solcher Ausdruck nur mit Hilfe einer recht grossen Menge von Dickezeigern des Stammes — also nur auf recht umständliche Weise — konstruiert werden.

In einer Studie, die sich primär doch nur mit dem Volumen der Baumstämme befasst, ist es dagegen a priori nicht unbedingt notwendig, eine Mutterkurve für den Vergleichskörper aufzustellen, die der Stammkurve genau folgt; es gilt ja diesmal nur, eine Kurvengleichung zu finden, die in den fraglichen Fällen in Verbindung mit der Formel (1) nichts weiter als nur einen genügend guten Volumausdruck für den

¹ Es sei auch im Gegensatz hierzu an das neuerdings von MATHIESEN ausgearbeitete Kubierungsverfahren erinnert, welches sich auf die bekannte GULDIN'sche Regel für Kubierung von Rotationskörpern gründet.

A. MATHIESEN 1925, Tüve pikuti läbilöike pind kui faktor tüve massi määramiseks. (Mit deutschem Referat: Die Längsdurchschnittsfläche eines liegenden Stammes als Faktor zur Bestimmung dessen Kubikinhaltes.) Tartu Ülikooli metsaosak. toimet. Nr. 6.

Stamm oder sogar nur eine geeignete Grundlage für die dann mehr oder weniger freie Weiterentwicklung angemessener Stammkubierungsformeln darbietet.

Die Fragestellung der theoretischen Stammkubierung wird hierdurch selbstverständlich bedeutend erleichtert, und es hat sich auch dabei gezeigt, dass die theoretische Grundbehandlung der Stammkubierungsformeln auf einer derart vereinfachten Basis, wenigstens in gewissen Hinsichten, recht übersichtlich, befruchtend und auf eine mit den praktischen Gesichtspunkten wohl übereinstimmende Weise durchgeführt werden kann. Die einem solchen Verfahren anhaftende Unsicherheit der erhaltenen ersten theoretischen Grundergebnisse kann und soll auch, wie erwähnt, durch die immer offenstehende Möglichkeit, die Ergebnisse an natürlichem Stammaterial als dem entscheidenden Prüfstein zu kontrollieren, beseitigt werden, bei welcher Gelegenheit die fraglichen Volumformeln unter Umständen auch endgültig verfeinert bzw. festgestellt werden können.

Eine Kurve, die trotz offener Schwächen als Vertreter der Stammkurve eine, wie die früheren Erfahrungen¹ und auch die hier gemachten weiteren Untersuchungen gezeigt haben, in mehreren Hinsichten recht vorteilhafte und besonders neue Anregungen ergebende Basis für die theoretische Vorprüfung verschiedener Fragen auf dem Gebiet der Stammkubierungsformeln ganzer Stämme darbietet, ist die allgemein angewandte sog. Potenzkurve.

Diese Kurve ist auch in der vorliegenden Studie als erste theoretische Basis in der Frage der Stammkubierungsformeln herangezogen.² Die weitere entscheidende Erörterung geschieht, wie erwähnt, nebenbei auf Grund eines natürlichen Stammaterials, was also das angenommene theoretische Untersuchungsverfahren weiter richtigstellt und ergänzt.

Die Stellung der Potenzkurve zu dem vorliegenden Thema, als theoretisch vermittelnde Untersuchungsbasis im allgemeinen betrachtet, ist wohl so bekannt, dass eine erneute prinzipielle Darlegung in dieser Hinsicht hier kaum vonnöten sein dürfte. Wie sich diese Kurve jeweils zu den speziellen Fragen in betreff der echten Stammkubierungsformeln

¹ Vgl. z. B. die betreffenden Hand- und Lehrbücher.

² Im Zusammenhang mit der theoretischen Begründung eines vom Verf. aufgestellten Verfahrens zu praktischer Qualitätsschätzung von Nutzstämmen hofft Verf. auf die Frage der genaueren Stammkurveninterpretierung als solcher in naher Zukunft zurückkommen zu können.

verhält, wird während des Fortgangs der Arbeit jedesmal besonders untersucht und nachgewiesen werden. —

Die Gleichung dieser Kurve kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$(2) \quad \left(\frac{D}{2}\right)^2 = p(H-a)^r,$$

wo, ausser den schon oben gegebenen Bezeichnungen, r den sog. Formexponenten und p einen Parameter bezeichnen.

In Verbindung mit der Formel (1) erhält man, wie bekannt, auf Grund der Formel (2) für das Volumen ganzer Konoiden weiter folgende Allgemeinformel (vgl. Fig. 1):^{1,2}

$$(3) \quad V = \frac{\left(1 - \frac{a}{H}\right)^{-r}}{1+r} \frac{\pi}{4} D^2 H.$$

Setzt man hier statt $\frac{\pi}{4} D^2$ die Bezeichnung G (Kreisfläche) und statt des ersten Bruches die Bezeichnung F , also

$$(4) \quad F = \frac{\left(1 - \frac{a}{H}\right)^{-r}}{1+r},$$

so geht die Formel (3) in die Form

$$(5) \quad V = FGH$$

über.

Wie allbekannt, trägt F den Namen Formzahl. Ihre allgemeine, von der Potenzkurve unabhängige Formel lautet bekanntlich, gemäss Formel (5)

$$(6) \quad F = \frac{V}{GH},$$

wo V das Volumen des Baumstammes bezeichnet. Die Formzahl ist eine in betreff des Grades der Vollholzigkeit des Stammes (gemäss Formel (4) in betreff des Formexponenten r) und der Verhältniszahl $\frac{a}{H}$ variable Grösse.

Drückt man a in bezug auf H durch eine relative Zahl aus, somit

¹ Vgl. U. MÜLLER 1923, Lehrbuch der Holzmesskunde. 3. Aufl. Berlin. (S. 16.)

² r charakterisiert, wie bekannt, für den Wert Null den Zylinder, Eins das Apollonische Paraboloid, Zwei den gemeinen Kegel und Drei das Neiloid.

$\frac{a}{H} = \alpha$, wo α also einen Wert zwischen Null und Eins hat, so erhält man die echt oder normal benannte Formzahl. Für diesen Fall geht die allgemeine Formzahl (4) entsprechend in die Form

$$(7) \quad F_\alpha = \frac{(1-\alpha)^{-r}}{1+r}$$

über.

Die so erhaltene Normalformzahl ist aber nur ein spezieller Sonderfall von den verschiedenen solchen Formzahlen, die bei der in Frage stehenden Volumbestimmung entwickelt werden können. Desgleichen ist auch Formel (5) nur ein Sonderfall von den verschiedenen Volumformeln dieses Typs. Einer sachlichen inneren Veränderung in dem Formeltyp (5) entspricht eine sachliche Veränderung der echten Formzahl.

Es ist weiter einleuchtend, dass auch die aus der Grundgleichung (1) herfliessenden, für die Baumstammkubierung vorgeschlagenen speziellen Volumformeln formal in den Formeltyp (5) übergeführt werden können. Hiermit bietet sich folglich eine Möglichkeit zu einer auf allgemeiner einheitlicher Basis ruhenden Musteruntersuchung einiger Eigenschaften der verschiedenen in Rede stehenden Stammkubierungsformeln. Diese Untersuchung läuft also auf einen Vergleich der Koeffizienten der speziellen in die Formeltyp (5) übergeführten verschiedenen Stammkubierungsformeln mit den jeweils entsprechenden echten Formzahlen, bzw. auf eine Auffindung der jeweils etwa besten Formelkoeffizienten, also auf eine Prüfung von bestimmten reinen Zahlen hinaus.

Hauptsächlich eine so durchgeführte Untersuchung stellt die vorliegende Studie dar. In ihrer Weise grunderklärend ist dabei die echte Formzahl gewesen, die hier also eine erneute theoretische und praktische Analyse erfordert hat. —

Die Darstellung ist nach gewissen Verschiedenheiten in dem Charakter der hier in Betracht kommenden Stammkubierungsformeln in verschiedene Abschnitte geteilt. Die Untersuchung bezieht sich, wie schon erwähnt, nur auf Vollkörper.¹

¹ Es sei noch erwähnt, dass die Frage der Stammkubierungsformeln hier kein vergleichendes Studium zwischen der direkten Volumformelmethode und den anderen Verfahren zur Bestimmung des Stamminhalts veranlasst, sowie dass hier auch keine besondere Abwägung der verschiedenen Kubierungsformeln in bezug auf die verschiedenen Spezialzwecke der Stammkubierung als solche vorgenommen werden soll.

I

Für jene üblichen Stammkubierungsformeln, die sich auf einen in fester Teilhöhenlage befindlichen Durchmesser und die Ganzhöhe des Stammes gründen, ist die in Anschluss an den Formeltyp (5) anzugebende Grundformel, wie bekannt, mit einem konstanten Koeffizienten F_k zu akkommodieren, also

$$(8) \quad V = F_k G_\alpha H,$$

wenn nämlich die in der Formel ersichtliche G_α dieselbe Kreisfläche vorstellt, die für die jeweils in Frage stehende Kubierungsformel bestimmend ist. (Vgl. Kap. IV.)

Für den vorzunehmenden vorläufigen theoretischen Vergleich zwischen diesen Stammkubierungsformeln und der allgemeinen entsprechenden Konoidvolumformel (3) ist also, wie erwähnt, ein Vergleich der gegebenen festen F_k -Werte der fraglichen Stammkubierungsformeln (für gegebene Teilhöhenlagen α der Durchmesserermittlung) mit den entsprechenden variierenden echten F_α -Werten der Formel (7) durchzuführen. Diese Untersuchung gibt Auskunft über die Frage, für welche r -Werte eine jede Stammkubierungsformel mit der Konoidformel (3) übereinstimmt und wie gross die entsprechenden Abweichungen ausserhalb dieser r -Werte sind.

Demgemäss ist in Fig. 7 die Abhängigkeit der Formzahl F_α von dem Formexponenten r in der Weise graphisch dargestellt, dass die Abszissenachse des rechtwinkligen Koordinatensystems den variierenden Formexponenten r und die Ordinatenachse die Formzahlen F_α repräsentieren. Die laufenden F_α -Werte erweisen sich in dem Bild, der Formel (7) gemäss, als Kurven, eine Kurve für jeden α -Wert. Die konstanten F_k -Werte werden ihrerseits in dem Bild also mittels wagrechter Linien vergleichend veranschaulicht.

In betreff der gegebenen diesbezüglichen Stammkubierungsformeln sind die zwei verschiedenen Kategorien der F -Werte in der in Rede stehenden Hinsicht folgendermassen nebeneinanderzustellen:¹

¹ FR. HUBER 1825. Zeitschr. f. Forst- u. Jagdwes. — Die nach HUBER benannte Zylinder- bzw. Paraboloidformel ist jedoch, wie bekannt, wenigstens vom Jahre 1758 an (von A. G. KÄSTNER) zur Baumstammkubierung angewandt worden. — Vgl. A. R. VON GUTTENBERG—U. MÜLLER, Holzmesskunde. T. v. LOREY—H. WEBER 1925, Handbuch der Forstwissenschaft, Bd. III, 4. Aufl. Tübingen. (S. 83.) — E. AMGWERT

HUBER	$F_k = 1$	F_α	für $\alpha = \frac{1}{2}$
HOSSFELD	» = $\frac{3}{4}$	»	» = $\frac{1}{3}$
Paraboloidformel	» = $\frac{2}{3}$	»	» = $\frac{1}{4}$
SMALIAN	» = $\frac{1}{2}$	»	» = 0.

Die Verhältnisse der einander entsprechenden F_k -Wagrechten und F_α -Kurven zueinander gehen aus Figur 7 deutlich hervor. Für die zwei r -Werte, für welche die fraglichen F_α -Werte gleich dem entsprechenden F_k -Wert sind, schneiden die paarweisen Linien einander (falls die Kurve

1903, Einfache Berechnungsweise des Massengehaltes von liegenden und stehenden Stämmen, Schweiz. Zeitschr. f. Forstwes., benutzt den KÖNIG'schen Näherungswert 3.2 für π und erhält die der HUBER'schen Formel entsprechende Kubierungsformel $V = 0.8 D^2 H$, die also hier einen F_k -Wert von der Grösse 1.015 besitzt. Andererseits führt AMGWERT auch den anderen naheliegenden Hilfswert 3 für π an, wodurch die fragliche Kubierungsformel die Form $V = 0.75 D^2 H$ annimmt und der F_k -Wert die Grösse 0.955 erhält. — Wie bekannt, hat man noch gewisse Umfangsersatzformeln für die Mittenmessung entwickelt; diese können hier jedoch unbeachtet bleiben.

J. W. HOSSFELD 1812, Niedere und höhere praktische Stereometrie oder kurze und leichte Messung und Berechnung aller regel- und unregelmässigen Körper, usw. Leipzig. (S. 123.) — S. PETRINI 1926, Formeln für Stammkubierung, Thar. Forstl. Jahrb. (S. 21 und 51), hat drei der HOSSFELD'schen Formel nahestehende Varianten angegeben: $V = \frac{25}{32} G H$ für $\alpha = 0.36$; $V = 0.73 G H$ für $\alpha = 0.34$ und $V = 0.71 G H$ für $\alpha = 0.33$. Die erstgenannte Formel bezieht sich auf die hier benutzte Erzeugungskurve des Rotationskörpers. Vgl. weiter unten.

H. L. SMALIAN 1806. Reichsanzeiger. (S. 321.) — Nach U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 23.) — E. AMGWERT 1903, l. c., schlägt auch hier den Wert 3.2 statt π vor und erhält somit die entsprechende Formel $V = 0.4 D^2 H$, die also einen F_k -Wert von der Grösse 0.509 hat. — F. A. PACHLER 1919, Einschätzung der Masse eines Einzelstammes, Silva (S. 15), benutzt seinerseits den anderen Näherungswert 3 und erhält demgemäss die entsprechende Formel $V = \frac{3}{8} D^2 H$, die also einen F_k -Wert $= 0.477$ besitzt. —

HERSCHE 1905, Vereinfachte Berechnung stehender Stämme, Schweiz. Zeitschr. f. Forstwes., führt für abholzige Stämme noch einen kleineren Formelkoeffizienten an, nämlich $\frac{1}{3}$, und erhält somit die Formel $V = \frac{1}{3} D^2 H$. Dieser Koeffizient würde hier einem F_k -Wert von der Grösse 0.424 entsprechen. Für vollholzigere Stämme befürwortet HERSCHE verschiedene Korrekturen. — In dem vorliegenden theoretischen Fall sind die hier angeführten Formeln in bezug auf die Nullhöhe zu akkommodieren. Bei der praktischen Vollstammkubierung sind sie am nächsten für die Brust- oder auch für eine angemessene Teilhöhenlage zu benutzen, die ersterwähnte Lage jedoch nur für grössere Stämme (vgl. weiter unten).

einen stetig sinkenden Charakter für steigende r -Werte besitzt (vgl. Formel (9)), gibt es nur einen gemeinsamen Punkt; Tangenten oder Ausenlinien zu den Kurven kommen unter den gegebenen Formeln nicht vor (vgl. S. 37 und Fig. 11—13)). Zwischen diesen zwei Schnittpunkten besteht die Ungleichung $F_k > F_\alpha$ und ausserhalb derselben umgekehrt die Ungleichung $F_k < F_\alpha$.

Der Vollständigkeit halber sei noch betreffs der Walze an die ergänzten Formeln für abgestumpfte Körper der erwähnten drei letzten Kubierungsformeln erinnert. Diese Formeln sind nämlich, wie bekannt, in jener Form auch für die Walze exakt.

Die hier zusammengestellte Formelliste nebst den verschiedenen Modifikationen, die in der zugehörigen Fussnote angeführt sind, hat noch nicht alle für die praktische Stammkubierung sich ergebenden, wirklich in Frage kommenden Möglichkeiten des Formelkonstruierens für den jetzt behandelten Fall — eindurchmessrige Kubierungsformeln — erschöpft. Ausserdem ist auch nicht gesagt, dass die bisherigen Formelkonstruktionen in den jeweils gegebenen Fällen als die bestmöglichen Anpassungen anzusehen sind.

In beiden Hinsichten dürfte es nun zweckmässig sein, die Frage der eindurchmessrigen Kubierungsformeln aufs neue von Grund aus, besonders mit praktischen Gesichtspunkten vor Augen, unter Behandlung zu nehmen. Dies geschieht hier auch. Bevor diese Absicht jedoch ausgeführt wird, scheint es, wegen gewisser unten sich ergebender Umstände, angebracht zu sein, erst die theoretische Seite der Frage noch ein wenig weiter zu entwickeln und besonders die Eigenschaften der echten Formzahlenkurven etwas näher zu studieren.

* * *

Die fraglichen Kurven gehen für $r = -1$ sämtlich ins Unendliche und haben demnach die gemeinsame Asymptote $r = -1$. Vgl. Fig. 7.¹

Die Grenzfälle des Bruches $\frac{a}{H}$ erhält man, wenn $\alpha = 1$ (d. h. $\alpha = H$), bzw. = Null gesetzt wird. Im erstgenannten Fall wird die Formzahl = ∞ (wenn r grösser als Null ist). Der andere Grenzfall gibt die sog. absolute Formzahl F_0 , für welche die bekannte Formel

¹ Der Anschaulichkeit halber sind in Fig. 7 auch negative Werte für r (bis -1) angewandt. Im Hinblick auf die Art der vorliegenden Studie besitzen die negativen Werte des Formexponenten r bekanntlich sonst kein Interesse.

$$(9) \quad F_0 = \frac{1}{1+r}$$

gilt. Diese Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren andere Asymptote die gegebene Abszissenachse ist. Vgl. Fig. 7.

Welchen Wert α auch hat, gibt die Formel (7) für F_α den Wert Eins, wenn r gleich Null ist, d. h. alle F_α -Kurven haben einen gemeinsamen Punkt: $r = 0$; $F_\alpha = 1$.

Ferner sind die Kurven — wie schon aus Fig. 7 zu ersehen ist — je für sich durch ein Minimum charakterisiert. Für den r -Wert, der einem Minimumpunkt entspricht, gibt der jeweils in Rede stehende F_k -Wert seine grösste positive Abweichung von dem entsprechenden F_α -Wert (nämlich in dem Falle, dass die fragliche F_k -Wagrechte höher als dieser Punkt liegt).

Mittels Derivation kann der Minimumpunkt für jeden fraglichen α -Wert aus der Kurvengleichung (7) bestimmt werden.

Für die Abszisse des Minimumpunkts erhält man erstens den Wert¹

$$(10) \quad r_{\alpha_{mp}} = -\left(1 + \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right).$$

Substituiert man weiter diesen $r_{\alpha_{mp}}$ -Wert in Formel (7), so erhält man die entsprechende Ordinate

$$(11) \quad F_{\alpha_{mp}} = -\log(1-\alpha) \cdot (1-\alpha)^{\left(1 + \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right)}.$$

Vgl. Fig. 7.^{2 3} —

¹ In dieser Studie werden nur die natürlichen Logarithmen benutzt.

² Z. B. für die Minimumpunkte der der HUBER'schen und der HOSSFELD'schen Kubierungsformeln entsprechenden F_α -Kurven erhält man folgende Koordinaten: $r_{\frac{1}{2}mp} = 0.443$, $F_{\frac{1}{2}mp} = 0.912$; $r_{\frac{1}{3}mp} = 1.466$, $F_{\frac{1}{3}mp} = 0.735$. Die in Frage stehenden Wagrechten F zeigen mithin folgende maximale positive Abweichungen von dem gegebenen F_α -Wert aus gerechnet: $+A_{\max}(\text{HUBER}) = 6.15\%$; $+A_{\max}(\text{HOSSFELD}) = 2.07\%$.

³ Die verschiedenen Minimumpunkte lassen sich im Anschluss an die Anschauung, dass α als eine zwischen den Grenzwerten Null und Eins liegende kontinuierliche variable Grösse angesehen werden kann, zu einer Minimumkurve vereinigen.

Die Formel dieser Kurve wird erhalten, wenn die Formel (10) in bezug auf α gelöst und der erhaltene Wert in die Gleichung (7) eingesetzt wird. Die gewonnene Formel lautet

$$F_{\alpha_m} = \frac{e^{\frac{r}{1+r}}}{1+r}.$$

(Forts.)

Von den verschiedenen Problemen, die sich auf Grund der erhaltenen verschiedenen Formeln aufstellen können, möge hier besonders das u. a. von MÜLLER angeführte:¹ es heisst die Lösung für α und F_α in betreff Gleichheit des F_α -Werts für zwei bestimmte r -Werte hervorzubringen — in allgemeiner Weise entwickelt werden.

Es gilt erstens, die Gleichung (7) für die zwei jeweils in Frage stehenden r -Werte anzupassen, die rechten Glieder dieser Gleichungen unter sich gleichzusetzen und die neue Gleichung in bezug auf α zu lösen, somit

$$\frac{(1-\alpha)^{-r_1}}{1+r_1} = \frac{(1-\alpha)^{-r_2}}{1+r_2},$$

woraus

$$(12) \quad \alpha = 1 - \left(\frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}}.$$

Dieser α -Wert, in die Formel (7) eingesetzt, gibt die Formel derjenigen F_α -Kurve, die für die fraglichen Abszissenwerte r_1 und r_2 gleichhohe Ordinaten hat. Diese Formel lautet

$$(13) \quad F_{\alpha_{r_1 r_2}} = \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r_2}{1+r_1} \right)^{\frac{r}{r_2-r_1}}.$$

Den gemeinsamen Ordinatenwert für die Abszissen r_1 und r_2 erhält man ferner aus dieser Formel, wenn statt des variablen Koeffizienten r entweder r_1 oder r_2 eingesetzt wird.²

* * *

Diese Kurve ist ihrerseits u. a. durch ein Maximum $F_{\alpha_{mMp}} = 1$ für $r=0$ und zwei diesem naheliegende Inflexionspunkte $F_{\alpha_{mIp}} = 0.886$ und $= 0.305$ für $r = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ charakterisiert. Der Maximumpunkt der Minimumkurve ist der Minimumpunkt der F_α -Kurve für $\alpha = 1 - \frac{1}{e}$; diese zwei Kurven tangieren folglich einander. — Vgl. Fig. 7.

¹ U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 17.) Vgl. die 1. Auflage 1899. (S. 16—17.)

² PETRINI (vgl. S. 9 Fussnote) hat sich dieses MÜLLER'schen Verfahrens bei der Herleitung seiner Formeln bedient. Gibt man in den Formeln (12) und (13) dem einen signierten r den Wert 1 und dem anderen den Wert 1,5, so erhält man für α den Wert 0,36 und für die echte Formzahlenkurve die Gleichung $F_{0.36} = \frac{1.25^{2r}}{1+r}$. Für den fraglichen Ordinatenwert wird drittens der Wert $\frac{25}{32}$ erhalten. Diese Zahlenwerte cha-

Es wird hiernach die Frage über die Aufstellung von eindurchmessrigen Stammkubierungsformeln für Vollkörper als solche teils in betreff der Aufstellung eventueller neuer praktischer Formeln, teils in bezug auf die ev. Zurechtstellung der alten Formeln behandelt.

Die zwei im Anfang dieser Studie angegebenen Verfahren zur Aufstellung von Stammkubierungsformeln sind zu benutzen.

Bei der theoretischen Herleitung von Kubierungsformeln können verschiedene Ausgangspunkte gewählt werden. Einer wäre z. B. die gleich oben angeführte, von MÜLLER gestellte Bedingung, dass die betreffende Volumformel zwei mit bestimmtem Ziel von vornherein theoretisch festgesetzten Fällen genau entsprechen soll.¹

Eine andere Sache ist aber, ob es sich wirklich lohnt und ob es auch wirklich zum erhofften Ziel führt, derart angelegte theoretische Bedingungen für den jetzt vorliegenden Fall — die eindurchmessrigen Stammkubierungsformeln — aufzustellen und durchzuführen.

Es scheint in der Tat, als wären die eindurchmessrigen Formeln, besonders in der Praxis, doch recht bedingte Kubierungsformeln,² die leicht die zarteren theoretischen Wägungen als übertheoretisiert und unstichhaltig erscheinen lassen (vgl. z. B. weiter unten).³ Ausserdem

rakterisieren die angeführte erste PETRINI'sche Stammkubierungsformel. — Für diese Formel gelten übrigens folgende Minimumpunkt- und positive Maximalabweichungswerte, für welche der Autor selber probeweise Annäherungswerte gegeben hat: $r_{0.36_{mP}} = 1.2407$; $F_{0.36_{mP}} = 0.7764$; $+ \mathcal{J}_{\max} = 0.62$ %.

¹ PETRINI (1926, l. c.) versucht diese zwei Fälle auf Grund der Breite der Stammformvariation so zu bestimmen, dass gewisse theoretisch bestimmte positive und negative grösste Abweichungen in betreff dieser Grundfälle ungefähr gleich wiegen. Beispiele dieser Versuche sind in den Fussnoten S. 9 und 12 (2) hier angeführt.

² Abgesehen von den verschieden ausgebildeten Stammhauptformvariationen und Stammverteilungen verschiedener Holzarten bzw. Wuchsverhältnisse sei hier besonders an die in recht weiten Grenzen variierende Anschwellung des unteren Stammteils, an die mehrfachen anderen sekundären Störungen in dem Verlauf der Stammkurve (Periodizität des Wuchses, Astquirle, Stammdefekte usw.) sowie an die Messungs- und Beobachtungsfehler (vgl. z. B. TISCHENDORF 1925) erinnert.

W. TISCHENDORF 1925, Die Genauigkeit von Messungsmethoden und Messungsergebnissen bei Holzmassenermittlungen. Forstwiss. Cbl.

³ Die Mindestforderung, die im Zusammenhang mit einem derartigen Verfahren jedenfalls gestellt werden müsste, ist die, dass wenigstens das Stammvolumen in seiner Gesamtheit (und auf eine richtig abgewogene Weise) in Betracht gezogen wird. Es sei hierzu die PETRINI'sche Anpassung des erwähnten MÜLLER'schen Verfahrens, in welcher z. B. die Ausbauchung der unteren Stammartie ganz ausser Acht gelassen ist, erwähnt. Vgl. die Fussnoten S. 20 (2) und 22 (2).

kann bei einer in erwähnter Weise konzipierten Formelentwicklung den in der praktischen Formelanwendung bedeutungsvollen Momenten: Einfachheit sowohl in betreff des Formelkoeffizienten wie der Teilhöhenlage der Durchmesserermittlung, keine zweckbewusste Beachtung geschenkt werden.¹ Ferner scheint noch die Einwirkung besonderer, noch nicht näher untersuchter Momente hinzuzukommen (vgl. weiter unten).

Die Erfahrung dürfte in der Tat gezeigt haben, dass die im allgemeinen praktischen Gebrauch sich bewährenden eindurchmessrigen Formeln, soweit nämlich solche überhaupt Anwendung finden, auf einer etwas allgemeineren und Formeleinfachheit verleihenden Basis als der besprochenen theoretischen konstruiert und formuliert werden müssten. Die Ausgangspunkte, die demgemäss schon von altersher aufgestellt worden sind und die auch noch heute gelten, lauten bekanntlich:²

Während mit der Formel eine möglichst gute Gesamtanpassung an die vorkommenden Stammformvarianten angestrebt wird, sollte sie in einfacher Form aufgebaut und in bezug auf die Durchmesserhöhenlage rechnerisch bequem definiert sein.

Es scheint nun am vorteilhaftesten zu sein, die Teilhöhenlage des Durchmessers zum ersten Ausgangspunkt der Aufstellung von Stammkubierungsformeln zu nehmen.

Mit Rücksicht darauf, dass der Stamm bald im Liegen, bald im Stehen zu kubieren ist, können in der Praxis bekanntlich verschiedene Durchmessererteilhöhenlagen in Frage kommen. Es kann somit zweckmässig sein, hier alle als rechnerisch einfach zu bezeichnenden Teilhöhenlagen, die überhaupt bei der Kubierung von Baumstämmen in Betracht kommen, vorläufig zu prüfen.

In diesem Sinne werden folgende Teilhöhenlagen etwas näher untersucht:³ $\frac{1}{2}$, 0.4, $\frac{1}{3}$, 0.3, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{20}$. Ausserdem könnte noch theoretisch die Nullhöhe erwähnt werden, statt deren in der Praxis jedoch, und zwar wegen der unregelmässigen Ausbauchung des unteren Stammteils sowie zwecks möglichst bequemer Durchmesser-

¹ Vgl. z. B. die recht unbequemen Formeln PETRINI'S S. 9 Fussnote.

² Vgl. z. B. U. MÜLLER 1923, I. c. (S. 23.)

³ Aus mehreren Gründen ist es kaum zweckmässig, bei der Anwendung eindurchmessriger Stammkubierungsformeln höher hinauf als bis zur Halbhöhe zu gehen.

anpassung die Brusthöhe allgemein zur Anwendung gekommen ist.¹ Auch hier ist in dieser Hinsicht versuchsweise zu der Brusthöhe gegriffen worden.

Die Frage der eventuell möglichen neuen Stammkubierungsformeln darf nun nicht gern primär mit den oben erwähnten, von altersher aufgestellten Kubierungsformeln verknüpft werden. Es ist nämlich, wie bemerkt, gar nicht gesagt, dass diese für den echten Baumstamm überhaupt richtig angepasst sind. In der Tat sind sie ja nur für theoretisch formulierte Annäherungskörper mit bestimmten Voraussetzungen aufgestellt worden.

Die Aufgabe soll hier also frei durch genaue Messungen an natürlichem Stammmaterial gelöst werden. Es gilt mit anderen Worten, durch Einzelkubierungen und Mittelwertberechnungen die besten einfachen Koeffizienten für den Zylinder $G_\alpha H$ bzw. für die Rechtecksäule $D_\alpha^2 H$ (vgl. weiter unten) der verschiedenen rechnerisch einfachen Durchmessererteilhöhenlagen in betreff des Stammvolumens aufzufinden. Erst nach der Lösung dieser Frage scheint es zweckmässig, nach einer Anknüpfung an die in Frage stehenden theoretischen Momente zu streben.

In Übereinstimmung hiermit ist hier, wie auch schon oben erwähnt, ein echtes Stammmaterial zur Grundlage der Untersuchung genommen worden.

Die Untersuchung ist hier eine prinzipielle. Ein relativ begrenztes exemplifikatorisches Stammmaterial dürfte somit als erster Musterzeiger genügen.

Es sind hier 24 Kiefernstämmen untersucht worden. Sie sind gleichmässig aus 6 verschiedenen Beständen verschiedener Waldtypen (Cladina-Typ (CIT), Vaccinium-Typ (VT) und Oxalis-Myrtillus-Typ (OMT)) und verschiedenen Alters zusammengebracht.

Die Hälfte der Probestämme misst über die Rinde genau 5 Engl. Zoll in der 6 m-Höhe, und die andere Hälfte ist in derselben Höhe ebenso

¹ Auf die Schwierigkeiten, die bei der Behandlung der Stammkubierungsfrage sowohl in theoretischer wie praktischer Hinsicht aus der unregelmässigen unteren Stammausbauchung entstehen, braucht wohl hier nicht besonders eingegangen zu werden. Es sei jedoch z. B. auf LÖNNROTH 1925, S. 203 ff. und 233 ff. hingewiesen.

E. LÖNNROTH, Untersuchungen über die innere Struktur und Entwicklung gleichaltriger naturnormaler Kiefernbestände. Acta forest. fenn., 30, N:o 1.

genau 10 Zoll stark. Infolge der verschiedenen Waldtypen sind die Stammhöhen für die sonst gleichdicken Stämme sehr verschieden (5": CIT von 11 bis 12 1/2 m, VT von 14 1/2 bis 16 m, OMT von 18 bis 19 1/2 m; 10": CIT von 15 1/2 bis 17 m, VT von 20 bis 21 m, OMT von 24 bis 25 1/2 m). Die Anschwellung der unteren Stammpartie wie auch die Stammform als solche sind ebenso auf den verschiedenen Typen recht verschieden. — Die Probestämme sind aus Kauttua in West-Finnland und bilden einen Teil eines grösseren, vom Verf. 1913 mit der Konstantkluppe für einen anderen Zweck gesammelten Materials.

Das Grundvolumen der Stämme, d. h. das Volumen, auf Grund dessen die gesuchten Formelkoeffizienten der verschiedenen Teilhöhenlagen zu berechnen sind und mit welchem die verschiedenen später vorgeführten Formelvolumina ferner zu vergleichen sind, ist durch einmetersektionsweise Kubierung nach der Mittenflächenformel erhalten. Der Stamm (mit Rinde) ist in seiner ganzen Länge nach vom Bodenpunkt bis zur Stammspitze kubiert.

Die Kubierungsergebnisse sind in einer Tabelle am Schluss dieser Studie zusammengefasst. Die Grundvolumina sind in absolutem Mass, die verschiedenen, weiter unten näher begründeten Vergleichsvolumina entsprechend ihren Abweichungen von diesen Grundvolumina in Prozenten angegeben. Arithmetische Mittelzahlen für die Abweichungsprozente der verschiedenen Serien sind berechnet (m). Neben diese Werte sind die ebenso wichtigen und aufklärenden Dispersions- (Streuungs-)werte (σ) der verschiedenen Formelresultate gestellt.¹ Schliesslich sind auch die entsprechenden mittleren Fehler ($\varepsilon(m)$ und $\varepsilon(\sigma)$) berechnet und angeführt. —

Die erhaltenen Resultate gelten also zunächst nur für den berindeten Kiefernnutzstamm (in dem von dem Repräsentativitätsmass des Materials gestatteten Grade). Inwieweit sie auch für Stämme anderer Art anzuwenden sind, bzw. auf welche Weise sie für andere Fälle zu modifizieren wären, können fortgesetzte Untersuchungen zeigen.

Für alle 24 Probestämme wurde der Durchmesser in allen erwähnten zwölf Teilhöhenlagen sowie in der Brusthöhe ermittelt. Nachdem jeweils das fragliche Zylindervolumen $G_\alpha H$ erhalten war, wurde der Zylinderkoeffizient (die natürliche echte Formzahl) F_{α_k} durch ein-

¹ Die Dispersion ist das quadratische Potenzmittel der Abweichungen der einzelnen Varianten vom arithmetischen Mittelwert der Reihe aus gerechnet.

fache Schlussrechnung $F_{\alpha_k} = \frac{V}{G_\alpha H}$ (vgl. Formel (6)), wo V das Grundvolumen des Stammes war, berechnet. Weiter wurde der Koeffizient F_{α_c} für die entsprechende Rechtecksäule $D_\alpha^2 H$ gefunden, wenn F_{α_k} mit $\frac{\pi}{4}$ multipliziert wurde. Dieser Koeffizient kann vielleicht hier »Prismenkoeffizient« genannt werden. Er bezweckt, die Stammkubierungsformel allgemein in der Form $V = F_c D^2 H$ schreiben zu können.

Über diese Formelform sei hier in prinzipieller Hinsicht hervorgehoben, dass für die Baumstammkubierung als solche natürlicherweise kein sachlicher Unterschied zwischen den zwei Formelformen $V = F_k G H$ und $V = F_c D^2 H$ besteht. Der Formelkoeffizient ist ja eine Grösse, die komplex von mehreren verschiedenartigen Umständen abhängt. Die Resultante dieser Umstände wirkt ihrerseits naturgemäss so, dass es zwecks einer einfachen Formelform in gegebener Durchmesser-teilhöhenlage bald am besten ist, den Faktor $\frac{\pi}{4}$ in seiner anfänglich primären Lage innerhalb des Faktors G beizubehalten, bald aber vorteilhafter, zwei unschöne Faktoren F_k und $\frac{\pi}{4}$ formal zu einem einzigen schönen Produkt F_c verschmelzen zu lassen und dabei D^2 freizugeben. Praktisch liegt hier dagegen der Unterschied vor, dass die F_c -Formeln ohne Tabellen im allgemeinen bequemer als die F_k -Formeln zu handhaben sind.¹ —

Aus den erhaltenen einzelnen Koeffizientenwerten wurden die arithmetischen Mittelwerte (m) für eine jede hier angegebene Teilhöhe (sowie für die Brusthöhe) berechnet. Da diese Mittelwerte schon als Koeffizienten für die fraglichen Stammkubierungsformeln angewandt werden könnten, werden sie hier mit F_k und F_c bezeichnet. Ausserdem wurden die entsprechenden Variationskoeffizienten (v) und die prozentischen mittleren Fehler ($\varepsilon(m)$, $\varepsilon(v)$) bestimmt. Die erhaltenen Werte gehen aus der folgenden Zusammenstellung hervor:²

¹ U. a. wegen dieser »Quadratflächenkubierungsformeln« wäre zu wünschen, dass die forstlichen Hilfstabellen neben den Kreisflächentafeln auch Quadratlächentafeln enthielten.

² Der Variationskoeffizient ist bekanntlich die in Prozenten vom arithmetischen Mittelwert ausgedrückte Dispersion.

Dass diesmal der Variationskoeffizient und nicht die Dispersion benutzt ist, hat darin seinen Grund, dass das ersterwähnte Charakteristikum für F_k und F_c gleich ist, was aber die Dispersion als solche nicht ist. Ebenso sind die entsprechenden prozentischen mittleren Fehler unter sich gleich.

(Forts.)

Charakteristika einiger Stammkubierungsformeln.

Charakteristika	Teilhöhen												Brusthöhe
	$\frac{1}{2}$	0.4	$\frac{1}{3}$	0.3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	
F_k	1.022	0.868	0.794	0.760	0.711	0.664	0.624	0.597	0.575	0.554	0.539	0.445	0.501
F	0.802	0.682	0.623	0.597	0.559	0.521	0.490	0.467	0.452	0.435	0.424	0.349	0.393
v %	3.0	2.7	3.0	2.9	2.7	3.0	3.4	3.8	4.1	4.4	4.8	5.5	7.7

Die prozentischen mittleren Fehler liegen zwischen den Zahlenwerten: $\varepsilon(m) = 0.6$ und $= 1.6$; $\varepsilon(v) = 0.4$ und $= 1.1$

Die Tabelle ist sehr instruktiv.

Betrachtet man nämlich erstens die Zahlenhöhe des Variationskoeffizienten an sich, so fällt der recht oder sogar sehr kleine Zahlenwert dieses Koeffizienten für die etwa acht ersten Teilhöhenlagen ins Auge. Dies bedeutet eine verhältnismässig kleine Materialstreuung in diesen Höhenlagen, d. h. entsprechend eine recht bemerkenswerte Sicherheit der erhaltenen Resultate, so dass also einerseits das benutzte Material, trotz seiner Begrenztheit, wohl als recht signifikant für die hier aufgestellte Aufgabe bezeichnen werden könnte. Andererseits weist die erwähnte Tatsache darauf hin, dass die fraglichen Teilhöhenlagen also bis ungefähr zur Fünftel- bzw. zur Siebentelhöhe herab verhältnismässig gute Durchmesserlagen für die Volumbestimmung des Stammes sein dürften.

Zweitens fesselt die gewissermassen gesetzmässige Veränderlichkeit der Zahlenhöhe des Variationskoeffizienten die Aufmerksamkeit.

Die recht starke Steigung des in Frage stehenden Zahlenwerts für die untersten Teilhöhenlagen mit dem Sinken der Teilhöhe ist

Der Variationskoeffizient ist ferner formal gleich der Dispersion in der Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie, da sich diese Dispersion ja auf entsprechende prozentische Einzelwerte basiert. Sachlich sind diese zwei Charakteristika jedoch in der Hinsicht verschieden, dass, während der Variationskoeffizient hier die in bezug auf den Mittelwert prozentisch berechnete Dispersion ist, sich die Dispersion dort auf die von den einzelnen Grundwerten aus berechneten prozentischen Abweichungen der Vergleichswerte gründet. Die Zahlenwerte dieser zwei Charakteristika sind demgemäss nicht gleich, obwohl andererseits die bezüglichen Unterschiede natürlich hier nicht gross sein können.

natürlich nicht zu verwundern. Dagegen ist die etwa vorkommende Wellenbewegung dieses Zahlenwerts zwischen dem Halb- und dem Zwanzigstelhöhenpunkt interessanter, indem es scheint, als ob zwei Minima und ein Maximum dazwischen lägen.

Die Unterschiede der verschiedenen zunächst in Betracht kommenden Zahlenwerte sind freilich nicht so gross, dass es jetzt möglich wäre, die genannten Singularpunkte als sicher zu bezeichnen (die Unterschiede der betreffenden Zahlenwerte fallen innerhalb der Zufallsgrenzen), aber es scheint andererseits doch wahrscheinlich, dass ein Sinn in der zu beobachtenden Erscheinung liegen könnte. Fasst man nämlich die verschiedenen untersuchten Stammkurven näher ins Auge, so scheint daraus hervorzugehen, dass einerseits der konkave Teil der Stammkurve im Mittel am regelmässigsten (sehr schwach konkav) in der Nähe des Wendepunkts,¹ d. h. hier etwa in der Viertelhöhe, also gerade ungefähr in der Zone des unteren der in Rede stehenden Minimumpunkte des Variationskoeffizienten hinläuft. Andererseits scheint das Gebiet der Vier-Zehntelhöhe, wo also das andere Minimum liegt, nach okular gemachter Schätzung im Mittel den charakterfestesten Teil der hier wieder ausbauchenden Stammkurve zu sein.

Zwischen diesen zwei Punkten scheint das Gebiet der Drittelhöhe umgekehrt ein Maximum des Variationskoeffizienten zu charakterisieren. Einen entsprechend hohen Zahlenwert des besprochenen Charakteristikums zeigt hier auch die Halbhöhe, sowie nach unten erst die Fünftelhöhe. (Vgl. hierzu auch die entsprechenden Dispersionswerte in der Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie.)

Aus dem Gesagten dürfte sonach mit gewissem Vorbehalt hervorzugehen, dass sowohl die HUBER'sche wie die HOSSFELD'sche Teilhöhe kaum zu den besten Durchmesserlagen gehören dürften,² sondern dass der Durchmesser am vorteilhaftesten entweder zwischen diesen beiden Höhenlagen in der Vier-Zehntelhöhe oder auch weiter unten in der Viertelhöhe zu suchen wäre. Ferner wäre also die Fünftelhöhe in der Frage der Stabilität der Stamminhaltszahlen den zwei genannten, von altersher benutzten Teilhöhen ebenbürtig. Endlich dürften auch die Sechstel-

¹ Nach Einzelschätzungen und Mittelwertberechnung liegt der Wendepunkt für das benutzte Stammmaterial im Durchschnitt in der Teilhöhe 0.28. — In einer später zu veröffentlichenden Untersuchung gedenkt Verf. auf die Variation der Höhenlage des Inflexionspunkts näher einzugehen.

² Entsprechend hat auch die PETRINI'sche Teilhöhe 0.34 ein Zwischenmaximum der Dispersion (gemäss der Tabellenrechnung am Schluss dieser Studie) von 3.1 % gezeigt. Vgl. S. 9 Fussnote.

sowie die Siebentelhöhe für die Stammkubierung noch nicht als ungeeignet bezeichnet werden können. Dagegen scheinen die noch niedriger liegenden Teilhöhenlagen und besonders die absolute Brusthöhe unsichrere bzw. recht schwankende Einzelresultate zu geben, was ja auch ganz natürlich ist.

Wollte man aus diesen Ergebnissen noch etwas weitergehende Schlüsse ziehen, so könnten besonders die verhältnismässig sehr guten Resultate der Teilhöhenlagen weiter unterhalb der Stammitte von z. B. 0.3 bis zu $\frac{1}{5}$ oder sogar bis zu $\frac{1}{7}$ überhaupt, als recht bedeutungsvoll für den wachsenden Baum bezeichnet werden.¹ Es scheint somit, als hätten die besonderen biologischen Momente, die zu Gunsten dieser früher als weniger vorteilhafte Teilhöhen bezeichneten niedrigen Durchmesserlagen wirken, bis dato neben den mangelhaften mathematisch-theoretischen Auseinandersetzungen zu wenig Beachtung gefunden.² Weitere Untersuchungen werden wohl diese Fragen genauer klarlegen können. —

Betrachtet man ferner (in der obigen Tabelle) die erhaltenen Mittelwerte F_k und F_c etwas näher, so stellt sich heraus, dass für die wichtigeren Teilhöhenlagen sowie für die Brusthöhe einfache Koeffizienten diesen erhaltenen mittleren Zahlenwerten entweder sehr oder auch recht nahe stellen. Es lässt sich das folgende, die Sache illustrierende Schema aufstellen:³

¹ Es sei erwähnt, dass neulich HILDÉN für die Birke gezeigt hat, dass von verschiedenen absoluten Höhenlagen der Durchmesserermittlung diejenige um die 3 m-Höhe die im Mittel beste Stabilität in betreff des Stammvolumens (für etwa mittellange Stämme) besass; — also auch eine recht niedrige Durchmesserlage.

N. A. HILDÉN 1926, Koivun kuutioimisesta massataulukoiden avulla. Pohjois-Karjalasta kootun aineiston nojalla. (Mit deutschem Referat: Über die Kubierung der Birke mittels Massentafeln. Basiert auf Material aus Nord-Karjala.) Acta forest. fenn., 32, N:o 2.

² Es scheint somit, wenigstens auf Grund solcher theoretisch formulierter Stammkurven, die z. B. keinen Inflexionspunkt besitzen, nicht möglich zu sein, auf rein theoretischem Wege die Durchmesser-teilhöhenlage zu finden, die die verhältnismässig kleinste Volumstreuung (-dispersion) gibt. Vgl. die Fussnoten auf S. 12 (2), 13 (1 und 3), 19 (2) und 22 (2), wo ein Beispiel eines derartigen, auf fehlerhafte Prämissen gegründeten theoretischen Versuchs referiert ist.

³ Von den prozentischen Abweichungen der als einfach bezeichneten Näherungswerte der erhaltenen Mittelwerte im Verhältnis zu den entsprechenden mittleren prozentischen Abweichungen in der Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie gilt dasselbe, was über den Variationskoeffizienten und die Dispersion in dem letzten Absatz der Fussnote S. 17—18 hervorgehoben wurde.

Charakteristika einiger Stammkubierungsformeln.

Charakteristika	Teilhöhen											Brusthöhe	
	$\frac{1}{2}$	0.4	$\frac{1}{3}$	0.3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{20}$
F_k	0.794	.	0.711	0.661	.	0.597	0.501
Ersatzzahl	0.8	.	0.7	$\frac{2}{3}$.	0.6	$\frac{1}{2}$
F_c	0.802	0.682	.	0.597	.	.	0.490
Ersatzzahl	0.8	$\frac{2}{3}$.	0.6	.	.	$\frac{1}{2}$
Abweichung der Ersatzzahl, %	-0.3	-2.2	+0.8	+0.5	-1.6	+0.5	+2.1	+0.5	-0.2

Billigt man im Namen der Formeleinfachheit diese einfachen Ersatzzahlenwerte für die verschiedenen Teilhöhenlagen, was wohl schon darum geschehen kann, weil ja auch die erhaltenen Mittelwerte ihrerseits nur von relativer Genauigkeit sind (vgl. z. B. sogar die Unterschiede der zwei einander entsprechenden prozentischen Abweichungen in der oben angeführten sowie in der hintenstehenden Kubierungstabelle; vgl. auch S. 23), so kommt man zu folgenden, wenigstens für die berindete Nutzkiefer geltenden allgemeinen einfachen Stammkubierungsformeln der verschiedenen als verhältnismässig gut oder auch als anwendbar zu bezeichnenden einfachen Teilhöhenlagen, nebst der Brusthöhe:

Halbhöhe	$V = 0.8 D^2 H$
Vier-Zehntelhöhe	$V = \frac{2}{3} D^2 H$
Drittelhöhe	$V = 0.8 GH$
Drei-Zehntelhöhe	$V = 0.6 D^2 H$
Viertelhöhe	$V = 0.7 GH$
Fünftelhöhe	$V = \frac{2}{3} GH$
Sechstelhöhe	$V = \frac{1}{2} D^2 H$
Siebentelhöhe	$V = 0.6 GH$
Brusthöhe	$V = \frac{1}{2} GH$

Es stellt sich also heraus, dass allein die unsicherste alte Formel, die SMALIAN'sche, sich gehalten hat, und auch sie nur recht zufälligerweise. An die Stelle der HUBER'schen ist die erste HUBER-

AMGWERD'sche Formel getreten. Die einfache Paarformel zu der HOSSFELD'schen Formel (3.2 statt π) ist auf die neue Drei-Zehntelhöhe und auch die als Paraboloidformel bezeichnete Formel auf die neue Fünftelhöhe gesunken. In die Drittel- wie die Viertelhöhe sind entsprechend neue Koeffizienten getreten. Die Vier-Zehntel- sowie die Sechstel- und die Siebentelhöhe bezeichnen ganz neue Formeln.

Die drei alten Formeln, die HUBER'sche, die HOSSFELD'sche und die als Paraboloidformel bezeichnete Formel haben also sämtlich zu kleine Werte gegeben. Dass die zwei erstgenannten Formeln für die Kiefer im allgemeinen zu kleine Werte geben, dürfte wohl bekannt sein,¹ und dass ferner der Paraboloidkoeffizient $F_k = \frac{2}{3}$ für die Viertelhöhe durchschnittlich zu klein ist, ist ohne weiteres klar, wenn man sich erinnert, dass der primäre Inflexionspunkt der Stammkurve im Mittel in die Nähe der Viertelhöhe fällt.

Es sind also in der Sammlung der eindurchmessrigen Formeln recht tiefgreifende Umänderungen bzw. Vervollständigungen geschehen. Dass diese Veränderungen tatsächlich auch Verbesserungen (für die berindete Nutzkiefer in Finnland) sein dürften, wurde schon oben u. a. auf Grund der, trotz gemischtem Stammmaterial verhältnismässig niedrigen Variationskoeffizientenwerte hervorgehoben. (Vgl. dabei, was gleich unten noch z. B. über die Verschiedenheit in den Wuchsverhältnissen betreffs der Volumformeln angeführt ist.)

In der Tabelle am Schluss dieser Studie ist die Arbeit der hier durchgemusterten Teilhöhenkubierungsformeln mittels des benutzten Probenmaterials durch prozentische Resultatabweichungen von den Grundvolumina veranschaulicht worden. Die Ergebnisse müssen allgemein betrachtet als verhältnismässig befriedigend bezeichnet zu werden.² —

¹ Vgl. z. B. U. MÜLLER 1923, l. c., sowie LAPPI-SEPPÄLÄ 1926.

M. LAPPI-SEPPÄLÄ, Eräitä näkökohtia kaadettua puuta kuutioitaessa. Metsätal. Aikakk.

² Dasselbe kann aber nicht von dem Ergebnis der von PETRINI (auch gerade für Vollstämmen) konstruierten Formel $V = 0.73 G_{0.34} H$ (sine Hauptformel; vgl. S. 9 Fussnote) gesagt werden.

Wie ersichtlich, hat diese Formel sowohl einen kleineren Koeffizienten wie auch eine kleinere Kreisfläche als die HOSSFELD'sche Formel. Da schon die HOSSFELD'sche Formel einen auffallenden Unterbetrag ergeben hat, ist es nicht zu verwundern, dass die PETRINI'sche Formel ein wirklich grosses Defizit (Gesamtmittel = -9.1% , also das Mittel rund das Fünfzehnfache der von dem Formelkonstrukteur theoretisch berechneten engeren Maximalabweichung -0.6%) hat entstehen lassen; sämtliche 24 Stämme sind mit Minusabweichung ausgefallen. — Die PETRINI'sche Spezial-

Betrachtet man noch die erhaltenen Werte in bezug auf die verschiedenen ergiebigen Standorte, so gehen daraus gewisse Gruppenverschiedenheiten hervor. Da das Material jedoch recht klein ist und da die Verschiedenheiten hier noch nicht als unstrittig signifikant bezeichnet werden können (dass die bezüglichen Stammformen an sich indessen verschieden sein können, ist eine Frage für sich), so scheint es nicht möglich, hier getrennte Kubierungsformeln für verschiedene Kiefernpopulationen (Waldtypen bzw. Grössenklassen der Stämme) aufzustellen.¹ Nur die SMALLAN'sche Formel zeigt, wie auch natürlich, schon hier teilweise ganz deutliche Gruppenunterschiede, was mit zu der verhältnismässig grossen Dispersion führt. Da jedoch die Brusthöhe als Durchmesserlage für die eindurchmessrigen Kubierungsformeln auch sonst nur recht bedingte Möglichkeiten, das Volumen gut zu bestimmen, bietet, scheint es kaum vonnöten zu sein, auch noch für diese Durchmesserlage eine gegliederte Serie von Kubierungsformeln zu schaffen. —

Endlich könnte es angebracht sein, noch nach Anknüpfungen an die entsprechenden theoretisch berechneten echten Normalformzahlen zu suchen.

Vermerkt man in diesem Sinne die erhaltenen Mittelwerte F_k der verschiedenen Teilhöhenlagen auf den entsprechenden F_{α} -Kurven (auf den linken Schenkeln) in Figur 7 und verbindet die so erhaltenen Punkte miteinander, so erhält man ein regelmässig verlaufendes kleines Kurvenstück (siehe die »Koeffizientenkurve« F_{k_k} in Fig. 7).² Diese Kurve illu-

formelvariante für die Kiefer $V = 0.71 G_{0.33} H$ [hat, obwohl das Vergleichsmaterial hier gerade die (berindete) Kiefer ist, ein noch schlechteres Resultat gegeben.

Die Erzeugungskurve des Vergleichskörpers, deren sich PETRINI bedient hat (die HÖJER'sche Kurve), leidet mithin, so wie PETRINI sie benutzt hat, an Schwächen, die wenigstens für die Kubierung berindeter Kiefernnutzstämmen als ganz fatal zu bezeichnen sind. Vgl. S. 13 Fussnote 3 sowie S. 20 Fussnote 2.

¹ Dass noch weitere Verfeinerungen der in Rede stehenden Formeln durch ein grösseres, auch noch nach anderen wechselnden Wuchsverhältnissen differenziertes Stammmaterial zustandegebracht werden könnten, scheint ferner möglich zu sein. Eine derartige Aufgabenentwicklung dürfte jedoch in diesem Zusammenhang — eindurchmessrige Kubierungsformeln — kaum erforderlich sein. (Vgl. z. B. S. 13 nebst Fussnote 2.) — Ferner wäre auch natürlich die entrindete Kiefer als ein neuer Studiengegenstand zu behandeln.

² Zwischen $\alpha = 0.4$ und $= \frac{1}{2}$ sowie zwischen $= \frac{1}{10}$ und $= 0$ ist die Kurve nicht akkommodiert. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt der F_k -Wert $= 1.27$. Statt der theoretischen Nullhöhe ist hier weiter, wie mehrmals erwähnt, die Brusthöhe zur Anwendung gekommen.

striert also ihrerseits die gegenseitigen Beziehungen zwischen den F_k -Werten und den entsprechenden F_a -Kurven.

Es ist wahrscheinlich, dass z. B. verschiedene Holzarten zur Aufstellung verschiedener Koeffizientenkurven, d. h. teilweise verschiedener Kubierungsformeln Anlass geben.

Die jetzt entstandene kleine Kurve weist auf eine gute innere Festigkeit der verschiedenen Teilhöhenkoeffizienten hin, was also die hier erhaltenen Ergebnisse noch weiter bestätigt. Es scheint auch möglich zu sein, mittels dieser Kurve Formelkoeffizienten für zwischenliegende, hier nicht berechnete Teilhöhenlagen zu interpolieren.

II

Gibt man in der Formel (3) der Grösse a den Wert Null, d. h. wird der Grunddurchmesser D an der Basis des Konoids genommen, so vereinfacht sich die erwähnte Formel folgendermassen:

$$(14) \quad V = \frac{1}{1+r} \frac{\pi}{4} D^2 H.$$

Indem man in Formel (3) a mit h und D mit d bezeichnet, hat man (vgl. Fig. 2)

$$V = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)^{-r}}{1+r} \frac{\pi}{4} d^2 H.$$

Bei Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke von V ergibt sich mit Lösung für H

$$(15) \quad H = \frac{h}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r},$$

woraus durch Substitution in die Formel (14)

$$(16) \quad V = \frac{1}{(1+r) \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r\right]} \frac{\pi}{4} D^2 h.$$

Diese Formel ist der allgemeine Ausdruck der absoluten Richthöhenformel.

Die dem Formeltyp (5) entsprechende Formelform lautet hier

$$(17) \quad V = \mathcal{J}_0 G h,$$

wo also

$$(18) \quad \mathcal{J}_0 = \frac{1}{(1+r) \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r\right]}$$

ist und die folglich den Namen absolute Richthöhenformzahl tragen kann.

Wird weiter d durch eine relative Zahl in bezug auf D ausgedrückt, somit $\frac{d}{D} = \delta$, wo δ einen Wert zwischen Null und Eins hat, so geht die allgemeine \mathcal{J}_0 -Formel in die Formel der in betreff des Verhältnisses $\frac{d}{D}$ echten absoluten Formzahl über, somit

$$(19) \quad \mathcal{J}_{0\delta} = \frac{1}{(1+r) (1 - \delta^r)}.$$

Für die Theorie der fraglichen Volumbestimmung sind sowohl $\mathcal{J}_{0\delta}$ wie h von speziellem Interesse, weil sie beide sowohl von dem δ -Wert wie von dem Wert des Formexponenten r abhängig sind, $\mathcal{J}_{0\delta}$ an sich und h im Verhältnis zu der Ganzhöhe H des Konoids.

Es sei zuerst der Faktor $\mathcal{J}_{0\delta}$ analysiert.

Um die Variation dieses Faktors in betreff des variierenden Formexponenten r zu veranschaulichen, sind in Fig. 8 einige $\mathcal{J}_{0\delta}$ -Kurven für gewählte δ -Werte dargestellt. Diese Kurven ermöglichen ihrerseits, eine theoretische Vorprüfung der gegebenen ebenso theoretisch konstruierten Stammkubierungsformeln des Typs (17) mit konstantem Faktor \mathcal{J}_k , vorzunehmen. (Im nächstfolgenden Kapitel wird auf die praktische Seite der Richthöhenformeln überhaupt, eingegangen werden.)

Demgemäss seien die gegebenen festen \mathcal{J}_k -Werte und die entsprechenden variablen echten $\mathcal{J}_{0\delta}$ -Werte der Formel (19) miteinander verglichen.

Die diesbezüglichen bekannten Volumformeln sind von PRESSLER und WIMMENAUER aufgestellt worden,¹ und weiter bildet die SMALIAN'sche

¹ M. R. PRESSLER 1855, Beiträge zur Forst-Mathematik. Jahrb. d. Königl. sächs. Akad. f. Forst- u. Landw. zu Tharand, Bd. XI. — Ders. 1857, Aufforderung und Erfahrungen bezugs der im vorigen Bande dieses Jahrbuchs mitgetheilten Neuen Stammschätzungsmethode. Ibid., Bd. XII. — etc.

K. WIMMENAUER 1890, Die Schaftmassen-Ermittlung aus Grundstärke und Richthöhe. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit. — Vgl. auch W. GYLDENFELDT 1879, Om Bestem-

obenangeführte Kubierungsformel auch hier den Grenzfall durch ihren Wert $\delta = \text{Null}$, d. h. $h = H$ und somit $\mathcal{J}_{0_0} = F_0$. Vgl. Gleichung (9).

Die Vergleichsliste ist also die folgende:¹

WIMMENAUER	$\mathcal{J}_k = 1$	\mathcal{J}_{0_δ}	für	$\delta = 0.7$
PRESSLER	$\gg = \frac{2}{3}$	\gg	\gg	$= \frac{1}{2}$
(SMALIAN	$\gg = \frac{1}{2}$	\gg	\gg	$= 0$).

Die ausgezeichnete gegenseitige Übereinstimmung des PRESSLER'schen Linienpaars in dem am nächsten in Frage kommenden r -Gebiet geht aus Fig. 8 klar hervor. Im Gegensatz hierzu ist die der WIMMENAUER'schen Formel entsprechende \mathcal{J}_{0_δ} -Kurve recht steil. — Die Verhältnisse zwischen \mathcal{J}_k und \mathcal{J}_{0_δ} sind sonst im grossen ganzen dieselben wie oben zwischen F_k und F_α . Eine nähere diesbezügliche Analyse dürfte daher nur für einige Fragen angebracht sein.

Die Grenzfälle der Formel (19) ergeben sich für die Werte $\delta = \text{Null}$, d. h. $d = \text{Null}$, — bzw. $\delta = 1$, d. h. $d = D$.

Für den ersterwähnten Fall geht die genannte Formel, wie auch schon oben erwähnt, in die Formel (9) über.

Der andere Grenzfall kann auf zweierlei Weise entstehen. Einerseits so, dass der obere Durchmesser sich dem Basaldurchmesser nähert, um schliesslich mit ihm zusammenzufallen, d. h. der Faktor h nähert sich entsprechend dem Grenzwert Null. Andererseits so, dass r sich dem Grenzwert Null nähert, d. h. das Konoid nähert sich der Zylinderform.

melsen af Formtallet ved Massetaxationer. Tidsskrift for Skovbrug. — D e r s. 1880, Ueber die Bestimmung der Formzahl bei der Massentaxation. Zeitschr. f. Forst- u. Jagdwes. — F. A. LEHNPFUHL 1885, Die Formhöhe und ihre Bedeutung für Baumcubirung und Formzahlberechnung, sowie für die Werthsbestimmung des Langnützholzes. Zeitschr. f. Forst- u. Jagdwes. — In seinem ersten Aufsatz schlug GYLDENFELDT eine Verhältniszahl $\delta = 0.75$ und in dem erwähnten anderen eine Zahl 0.7 vor. Diese letztere Verhältniszahl wurde dann später von LEHNPFUHL und WIMMENAUER angenommen.

¹ Zum Vergleich sind in Fig. 8 noch einige andere \mathcal{J}_{0_δ} -Kurven als die hier erwähnten eingezeichnet, z. B. die dem PRESSLER'schen »zweiten« Richtpunkt ($\delta = \frac{1}{4}$) entsprechende Kurve.

M. R. PRESSLER 1865, Das Gesetz der Stammbildung und dessen forstwirtschaftliche Bedeutung insbesondere für den Waldbau höchsten Reinertrags. Leipzig. (S. 93 ff.)

Im ersterwähnten Falle nähert sich \mathcal{J}_{0_δ} dem Wert ∞ , so dass sich also der Volumausdruck in der Gleichung (17) der unbestimmten Form $\infty G 0$ nähert.

In dem zweiten Falle nähert sich dagegen der Faktor \mathcal{J}_{0_δ} dem Wert Eins, weil die Potenz δ^r (dadurch, dass die Vergrösserung des Exponenten in der Potenz von grösserer Wirkung als die des Bruches ist und der Bruch bis zum Grenzwert kleiner als Eins ist) sich dem Grenzwert Null nähert. In diesem Falle nähert sich der Volumwert in der Gleichung (17) dem ordinären Zylinderwert Gh oder, exakter geschrieben, GH .

Ein bemerkenswertes Korollarium zu dem angeführten zweiten Fall ist, dass alle \mathcal{J}_{0_δ} -Kurven sich dem schon oben charakterisierten »Zylinderpunkt« nähern. Der Zylinder ist hier ein Grenzfall, und im Sinne einer solchen Erscheinung ist das Zusammentreffen aller dieser Kurven (deren δ -Werte an sich also kleiner als Eins sind) in dem erwähnten Punkte zu verstehen.¹

Zweitens war das Verhältnis $\frac{h}{H}$ in bezug auf den δ -Wert und den Formexponenten r zu untersuchen.

Aus der Formel (15) ergibt sich unmittelbar die Gleichung

$$(20) \quad \frac{h}{H} = 1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r,$$

woraus weiterhin für $\frac{d}{D} = \delta$

$$(21) \quad \left(\frac{h}{H}\right)_\delta = 1 - \delta^r.$$

Fig. 9 veranschaulicht ihrerseits die Variationen des $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta$ -Bruches für verschiedene gewählte feste δ -Werte in bezug auf variierenden r -Wert.

Die $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta$ -Kurven bewegen sich zwischen der Abszissenachse und der damit parallelen, also wagrechten Linie auf der Höhe Eins, d. h. zwischen den Grenzwerten $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta = 0$ und $= 1$. Den ersteren Grenzwert findet man dadurch, dass δ in Formel (21) den Wert Eins erhält, was weiter bedeutet, dass der obere Durchmesser mit dem Basaldurchmesser zusammenfällt, wodurch also $h = 0$ wird. Der andere Grenzfall wird dadurch erreicht, dass dem Faktor d der Wert Null gegeben wird, wodurch also $\delta = 0$ und $h = H$ werden. Vgl. Fig. 9.

¹ Auch diese Kurven besitzen, wie ersichtlich, je einen Minimumpunkt, welche Punkte ferner zusammen eine Minimumkurve bilden.

Die Ordinaten der verschiedenen $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta$ -Kurven erreichen, wie aus der Formel (21) und der Figur 9 ohne weiteres zu ersehen ist, in bezug auf den Wert $r=0$ den Wert Eins. Der »Zylinderpunkt« ist somit auch hier ein gemeinsamer Grenzfall für die verschiedenen Kurven.

Gibt man r weiter den Wert ∞ , so erhält $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta$ den Wert Null in der Gleichung (21). Dies bedeutet, dass die Kurven sich in der Unendlichkeit der Abszissenachse nähern.

Die Kurven besitzen je für sich einen *I n f l e x i o n s p u n k t*. Die jeweilige Abszisse dieses Punkts wird durch die zweite Ableitung der Formel (21) in bezug auf r gefunden, somit

$$(22) \quad r_{\delta_{ip}} = -\log \delta.$$

Substituiert man diesen $r_{\delta_{ip}}$ -Wert in Formel (21), so erhält man die fragliche Ordinate

$$(23) \quad \left(\frac{h}{H}\right)_{\delta_{ip}} = 1 - e^{-2}.$$

Vgl. Fig. 9.¹

* * *

Für die Formzahlenfrage als solche kann es von Interesse sein, die Abhängigkeit der absoluten Grundformzahl F_0 von dem Verhältnis $\frac{h}{H}$ bei feststehendem $\frac{d}{D}$ -Wert theoretisch-prinzipiell klarzulegen.

Um diese Abhängigkeit näher zu zeigen, braucht man nur die Gleichung (21) in bezug auf r zu lösen und diesen Wert in die Formel (9) zu substituieren. Es wird erhalten

$$(24) \quad r = \frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H}\right)}$$

und weiter

¹ Wie ersichtlich, liegen die Inflexionspunkte der verschiedenen $\left(\frac{h}{H}\right)_\delta$ -Kurven auf einer und derselben mit der Abszissenachse parallellaufenden Geraden

$$\left(\frac{h}{H}\right)_{\delta_{ig}} = 1 - e^{-2}.$$

Diese Gerade kann hier folglich die *I n f l e x i o n s g e r a d e* genannt werden.

$$(25) \quad F_{0\delta} = \frac{1}{1 + \frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H}\right)}}.$$

In Fig. 10 sind $F_{0\delta}$ -Kurven speziell für das PRESSLER'sche und das WIMMENAUER'sche Richtverhältnis eingezeichnet.¹

Nähert sich das Verhältnis $\frac{h}{H}$ dem Wert Eins, d. h. nähert sich das Konoid dem Zylinder, so nähert sich $F_{0\delta}$ entsprechend dem Wert Eins. Für den entgegengesetzten Grenzwert $\frac{h}{H} = \text{Null}$ entspricht der Wert $F_{0\delta} = \text{Null}$.

Ein Teil der $F_{0\delta}$ -Kurven ist durch einen *I n f l e x i o n s p u n k t* charakterisiert. Die Koordinaten dieses Punkts sind

$$(26) \quad \left(\frac{h}{H}\right)_{0_{\delta_{ip}}} = 1 - (e\delta)^{-2}$$

und

$$(27) \quad F_{0\delta_{ip}} = 1 + \log \delta.$$

Da nun das Verhältnis $\frac{h}{H}$ hier nicht unter Null sinken kann, so ist, gemäss Formel (26), die für $\delta = \frac{1}{e}$ berechnete $F_{0\delta}$ -Kurve die niedrigstliegende Kurve, die theoretisch einen Wendepunkt besitzt. Dieser letzte Wendepunkt fällt mit dem Nullpunkt zusammen. Vgl. Fig. 10.²

¹ In dieser wie auch in einigen anderen Figuren weiter unten laufen die steigenden Abszissenwerte vom Nullpunkt her nach links. Dies ist gemacht, um prinzipielle Übereinstimmung mit den in einigen anderen Abbildungen durch den Formexponenten r angegebenen Abszissenwerten zu erlangen. Steigenden r -Werten entsprechen nämlich für feste δ -Werte, wie bekannt, sinkende $\frac{h}{H}$ -Werte.

² Der zusammenfassende Ausdruck dieser verschiedenen Inflexionspunkte (in betreff des als zwischen den Grenzwerten $\frac{1}{e}$ und 1 (Zylinderwert) kontinuierlich anzusehenden δ -Werts) gibt eine diesbezügliche *I n f l e x i o n s k u r v e* an. Die Gleichung dieser Kurve wird erhalten, wenn man δ aus der Formel (26) löst und den erhaltenen Wert in die Formel (25) substituiert. Die Formel der Inflexionskurve lautet demgemäss

$$F_{0\delta_i} = -\frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

Von dem Nullpunkt beginnend (vgl. das oben Gesagte), steigt die Inflexionskurve

(Forts.)

III

In dem vorhergehenden Kapitel wurde die Kategorie der absoluten Richthöhenformeln untersucht. In diesem Abschnitt wird das Richthöhenthema auf erweiterter Basis behandelt werden.

Nimmt man demgemäss auch den Grunddurchmesser D über der Körperbasis, wie Figur 3 zeigt, so gehen die hier in Frage kommenden Formelentwicklungen folgendermassen vor sich.

Es wird erstens erhalten (vgl. Fig. 3 und Formel (15))

$$(28) \quad H = a + \frac{h}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r},$$

und weiter durch entsprechende Substitution in die Formel (3)

$$(29) \quad V = \frac{1}{1+r} \left\{ 1 + \frac{a}{h} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r \right] \right\}^r \frac{\pi}{4} D^2 \left\{ a + \frac{h}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r} \right\},$$

welche Volumformel also die Ganzhöhe H nicht enthält.

Formeln, die von dem allgemeinen Typ der Formeln (5) und (17) sind, kann man hieraus mehrere herleiten. Dabei entstehen entsprechend mehrere Richthöhenformeln.

Eine derartige Formel erhält man, wenn man das rechte Glied der Formel (29) mit der »Richtpunktshöhe« h erweitert. Es wird erhalten

$$(30) \quad V = \xi G h,$$

wo ξ durch die Gleichung

$$(31) \quad \xi = \frac{1}{1+r} \left\{ 1 + \frac{a}{h} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r \right] \right\}^r \left\{ \frac{a}{h} + \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r} \right\}$$

gegeben ist.

hier bis zu dem Punkt: $\frac{h}{H} = 1 - e^{-2}$; $F_{0\delta_i} = 1$. Dieser Punkt wird erhalten, wenn in die Formel (26) für δ dessen hier in Frage kommender Maximalwert 1 eingesetzt und die $F_{0\delta_i}$ -Formel mit dem so erhaltenen $\frac{h}{H}$ -Wert gelöst wird. Vgl. Fig. 10.

Für die Theorie der fraglichen Volumbestimmung ist sowohl ξ wie h von speziellem Interesse, ξ an sich und h im Verhältnis zu der »Oberhöhe« $H-a$ des Konoids, alle beide in bezug auf den Bruch $\frac{d}{D}$ und den Formexponenten r , und ξ ausserdem hinsichtlich des Verhältnisses zwischen den verschiedenen Höhencharakteristika.

Von diesen aber ist h in der fraglichen Hinsicht schon in dem vorhergehenden Kapitel dieser Studie analysiert worden. Dazu ist nur zu bemerken, dass statt der Ganzhöhe H jetzt die Oberhöhe $H-a$ einzusetzen ist.

Bei der Berechnung der Relationszahl ξ wird die Aufmerksamkeit besonders auf die Grundhöhe a gelenkt. Dabei sind verschiedene Fälle zu beachten.

Ein Fall ist ein konstanter a -Wert. Dieser Fall wird hier jedoch theoretisch nicht näher erörtert, weil Verf. eine gerade auf denselben Fall basierte taxatorische Spezialabhandlung später zu veröffentlichen gedenkt.¹

Wird a weiter allgemein in fester Relation zu h angegeben, so ist ein Fall vorhanden, der in der praktischen Stammkubierung oder -formuntersuchung kaum von Interesse sein dürfte. Drückt man aber den Faktor a durch ein direktes Verhältnis in betreff der Ganzhöhe H aus, also wie oben $\frac{a}{H} = \alpha$, und löst man auch noch h aus der Gleichung (28), somit

$$(32) \quad h = (1 - \alpha) \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r \right] H,$$

und substituiert diesen Wert in die Formel (31), so erhält man dagegen einen in bezug auf das Verhältnis $\frac{a}{H}$ echten ξ -Wert, der eine gewisse Bedeutung für die vorliegende Untersuchungsaufgabe besitzt. In diesem Falle wird die Formel

$$(33) \quad \xi_\alpha = \frac{(1 - \alpha)^{-(1+r)}}{(1+r) \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^r \right]}$$

erhalten.

Wird seinerseits noch d , wie auch weiter oben, durch eine relative Zahl in betreff D ausgedrückt, somit $\frac{d}{D} = \delta$, so geht die ξ_α -Formel in die Formel

¹ Vgl. jedoch weiter unten die versuchsweise Brusthöhenanpassung.

$$(34) \quad \xi_{\alpha\delta} = \frac{(1-\alpha)^{-(1+r)}}{(1+r)\left(1-\delta^{\frac{2}{r}}\right)}$$

über, wo also $\xi_{\alpha\delta}$ echt sowohl in bezug auf $\frac{a}{H}$ wie auf $\frac{d}{D}$ ist.

Lässt man in dieser Formel α sich dem Wert Null nähern, so nähert sich $\xi_{\alpha\delta}$ dem Grenzwert $\mathcal{P}_{0\delta}$ in der Formel (19). Nähert sich α dem anderen Grenzfall Eins, so nähert sich $\xi_{\alpha\delta}$ dem Grenzwert ∞ .

In der folgenden näheren Untersuchung über die Arbeit der zuletzt erwähnten Formel sind für δ nur der PRESSLER'sche Wert $\frac{1}{2}$ und für α die Werte $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{10}$ benutzt. Die erstere Verhältniszahl α ist schon von PRESSLER und z. B. JUDEICH angeführt worden.¹

In Fig. 11 sind die $\xi_{\alpha\delta}$ -Kurven für diese zwei α -Werte in betreff des PRESSLER'schen Richtverhältnisses zum Ausdruck gebracht. Zum Vergleich ist da noch die Grenzwertkurve für $\alpha = \text{Null}$, d. h. die entsprechende $\mathcal{P}_{0\delta}$ -Kurve aus Fig. 8 eingezeichnet. —

Wird zweitens das rechte Glied der Formel (29) mit der »Richthöhe« $a+h$ erweitert, so erhält man, wenn noch $a+h$ mit L bezeichnet wird (vgl. Fig. 3)

$$(35) \quad V = qGL,$$

wo q (gemäß ähnlichen Umwandlungen, nach denen die Formeln (33) und (34) gleich oben entwickelt wurden) durch die Gleichungen

$$(36) \quad q_{\alpha} = \frac{(1-\alpha)^{-r}}{(1+r)\left\{\alpha + (1-\alpha)\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{r}}\right]\right\}},$$

bzw.

$$(37) \quad q_{\alpha\delta} = \frac{(1-\alpha)^{-r}}{(1+r)\left\{\alpha + (1-\alpha)\left(1 - \delta^{\frac{2}{r}}\right)\right\}}$$

gegeben ist.

¹ M. R. PRESSLER. (Allg. Forst- und Jagd-Zeit., Suppl.-Bd. II, S. 94.) — Nach FR. JUDEICH 1861. (S. 119.) — Ders. 1865, l. c. (S. 131 ff.)

FR. JUDEICH 1861, Vergleichende Untersuchungen über verschiedene Kubirungsmethoden. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit. (S. 119.)

Die $q_{\alpha\delta}$ -Werte sind, wie zu ersehen, kleiner als die $\xi_{\alpha\delta}$ -Werte für entsprechende α -, δ - und r -Werte.

In Fig. 12 sind analog mit der Figur 11 die $q_{\alpha\delta}$ -Kurven für $\delta = \frac{1}{2}$ in Verbindung mit $\alpha = 0$ ($\mathcal{P}_{0\delta}$ -Kurve), $= \frac{1}{20}$ und $= \frac{1}{10}$ eingezeichnet. —

Schliesslich sei noch die Formel

$$(38) \quad V = \chi G \left(L + \frac{a}{2} \right)$$

durch Erweiterung des rechten Gliedes der Formel (29) mit dem Höhenfaktor $L + \frac{a}{2}$ gebildet, in welcher Formel χ analog durch die Gleichungen

$$(39) \quad \chi_{\alpha} = \frac{(1-\alpha)^{-r}}{(1+r)\left\{1,5\alpha + (1-\alpha)\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{r}}\right]\right\}},$$

bzw.

$$(40) \quad \chi_{\alpha\delta} = \frac{(1-\alpha)^{-r}}{(1+r)\left\{1,5\alpha + (1-\alpha)\left(1 - \delta^{\frac{2}{r}}\right)\right\}}$$

gegeben ist. Die $\chi_{\alpha\delta}$ -Werte sind ihrerseits, wie ersichtlich, kleiner als die entsprechenden $q_{\alpha\delta}$ -Werte.

In Fig. 13 sind die $\chi_{\alpha\delta}$ -Kurven für $\delta = \frac{1}{2}$ in Verbindung mit $\alpha = 0$ ($\mathcal{P}_{0\delta}$ -Kurve), $= \frac{1}{20}$ und $= \frac{1}{10}$ eingezeichnet. —

1

* * *

Interessant ist es jetzt zu sehen, wie sich die Kurven in Fig. 11, 12 und 13 zueinander verhalten.

Wie ersichtlich, entspricht die Formel (38) hier der PRESSLER'schen Richthöhenmethode für Fälle, wo der Grunddurchmesser über dem Basaldurchmesser zu nehmen ist.

¹ Auch alle diese Kurven haben einen Minimumpunkt. Vgl. S. 27 Fussnote.

In betreff des Wertes $r=0$ erhalten nur die $q_{\alpha\delta}$ -Kurven den für den Grenzfall Zylinder sachlichen Wert Eins. Vgl. Fig. 11—13.

Bekanntlich wendet PRESSLER auch hier den festen Koeffizienten $\chi_k = \frac{2}{3}$ an, und wie aus Figur 13 zu ersehen ist, ist dieser Koeffizient für diesen theoretischen Fall auch sehr passend. Die echte Kurve weicht in dem am nächsten in Frage kommenden r -Gebiet sehr wenig von der PRESSLER'schen Wagrechten auf der Höhe $\frac{2}{3}$, sowohl in betreff des Wertes $\alpha = \frac{1}{20}, = \frac{1}{10}$ als auch anderer ev. in Betracht kommender Werte ab.¹ In dieser Hinsicht dürfte die Lösung PRESSLER's als eine sehr gute theoretische Lösung anzusehen sein.

Zu einer einigermaßen anderen Auffassung gelangt man jedoch über diese Lösung, wenn man die Form dieser PRESSLER'schen Formel

$$V = \frac{2}{3} G \left(L + \frac{a}{2} \right) \quad (\text{PRESSLER.})$$

im übrigen beurteilt. Es ist nämlich dabei nicht zu leugnen, dass die Klammer $\left(L + \frac{a}{2} \right)$ für die Berechnung des Volumens nicht bequem ist, ausserdem, dass die ursprünglich schöne Form der Ausgangsformel $V = \frac{2}{3} Gh$ verloren gegangen ist.

In diesem Sinne kann es angebracht sein, die zwei hier entwickelten vorhergehenden Volumformeln (30) und (35) ein wenig näher ins Auge zu fassen. Diese beiden Formeln besitzen nämlich fortwährend die ursprüngliche einfache Form der PRESSLER'schen Richtpunktsregel. In der ersterwähnten ist der Höhenfaktor durch die Richtpunktshöhe h und in der zweiten durch die Richthöhe L repräsentiert. Vgl. Fig. 3.

Die in der ersteren Formel vorkommende Verhältniszahl ξ hat für verschiedene α -Werte verhältnismässig stark voneinander abweichende Kurven, wie auch aus Figur 11 zu ersehen ist. Dieser Fall kann somit, wenn ein fester ξ_k -Wert für die Praxis zu benutzen ist, nur einem ganz engen Höhenverhältnisgebiet α akkommodiert werden.

Die vielleicht vorteilhafteste relative Höhe, in bezug auf welche dieser Fall anzuwenden wäre, dürfte die $\frac{1}{20}$ -Höhe sein. Hier liegt die

¹ Z. B. noch für $\alpha = \frac{1}{5}$ ist der Wert von $\chi_{\alpha\delta}$ nur 0.634 in betreff $r = 1$. Die Steigerung der $\chi_{\alpha\delta}$ -Werte ist somit recht langsam.

Vgl. übrigens PRESSLER's Herleitung seiner Formel.

$\xi_{\alpha\delta}$ -Kurve in dem am nächsten in Frage kommenden r -Gebiet ziemlich flach und, wie ersichtlich, bei der ungefähren Wertgrösse $\frac{3}{4}$. Entsprechend würde also eine Kubierungsformel von der Form

$$V = \frac{3}{4} Gh$$

aufzustellen sein.

Der obenerwähnte zweite Fall dürfte jedoch vorteilhafter sein. Wie nämlich aus Fig. 12 zu ersehen ist, weichen die verschiedenen hier in Frage kommenden $\varphi_{\alpha\delta}$ -Kurven weniger voneinander ab, woraus folgt, dass ein fester φ_k -Wert entsprechend freier angewandt werden kann. Die speziell für $\alpha = \frac{1}{20}$ berechnete $\varphi_{\alpha\delta}$ -Kurve liegt auch flacher als im vorhergehenden Fall. Die entsprechende Kubierungsformel wäre hier von der Form

$$V = 0.7 GL.$$

Vgl. Fig. 12.¹ — Für andere Teilhöhenlagen können noch weitere derartige Formelanpassungen entwickelt werden. —

Das ausgedehntere Richthöhenverfahren kann somit auch mit einer gewissen formalen Erleichterung im Vergleich zu der PRESSLER'schen Originalentwicklung dieses Verfahrens, durchgeführt werden.

Wie sich die verschiedenen Formeln weiter zu echtem Stammmaterial, besonders in betreff der Anschwellung des unteren Stammendes verhalten, ist eine neue Seite der Frage.

Zwecks Klarlegung dieser Fragestellung ist das hier herangezogene Stammaterial in ähnlicher Weise wie in Kap. I behandelt worden. Der Grunddurchmesser ist dabei, ausser in der angeführten Zwanzigstelhöhe, versuchsweise auch in die bequeme Brusthöhe verlegt worden.

Für die drei in Frage kommenden festen Koeffizientenpaare ξ_k — ξ_c , φ_k — φ_c , χ_k — χ_c haben sich folgende arithmetische Mittel- sowie Variationskoeffizientenwerte nebst prozentischen mittleren Fehlern (vgl. entsprechend die Fussnoten der Seiten 17 (2) und 20 (3) sowie die Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie) herausgestellt:

¹ Da die Teilhöhe, in welcher der Grunddurchmesser zu ermitteln ist, nicht absolut exakt bestimmt zu werden braucht, genügt es somit im allgemeinen, die Ganzhöhe und die betreffende Teilhöhe nur okulariter zu schätzen.

Zwanzigstelhöhe:

$$\begin{aligned} \xi_k &= 0.679 ; \varphi_k = 0.631 ; \chi_k = 0.608 . & \xi_k &= 0.764 ; \varphi_k = 0.683 ; \chi_k = 0.648 . \\ \xi_c &= 0.534 ; \varphi_c = 0.496 ; \chi_c = 0.478 . & \xi_c &= 0.600 ; \varphi_c = 0.536 ; \chi_c = 0.509 . \\ v &= 2.9 \text{ ‰} ; v = 2.9 \text{ ‰} ; v = 2.9 \text{ ‰} . & v &= 6.3 \text{ ‰} ; v = 4.0 \text{ ‰} ; v = 3.1 \text{ ‰} . \\ & \varepsilon(m) \text{ zwischen } 0.6 \text{ und } 1.3 \text{ ‰} ; \varepsilon(v) \text{ zwischen } 0.4 \text{ und } 0.9 \text{ ‰} . \end{aligned}$$

Brusthöhe:

Vergleicht man erstens die erhaltenen Variationskoeffizientenwerte unter sich, so wird einerseits ersichtlich, dass die Zwanzigstelhöhe für den Grunddurchmesser in betreff der drei angeführten Formeln ein gleiches Sicherheitsmass verleiht. Benutzt man also für den Grunddurchmesser eine feste Teilhöhenlage, so ist es, im Hinblick auf möglichst grosse Bequemlichkeit, vorteilhafter, sich einer Formel der hier entwickelten einfacheren Formeltypen zu bedienen als einer des PRESSLER'schen Originalformeltyps. Andererseits bestätigt sich für den Grunddurchmesser in absoluter (Brust)höhe, die oben in der theoretischen Vorprüfung gemachte Beobachtung, dass der PRESSLER'sche Originalfall zu den sichersten und die zuerst angeführte neue Formelentwicklung zu den ungünstigsten (sogar recht ungünstigen) Resultaten führt.

Vergleicht man zweitens die hier erhaltenen Variationskoeffizientenwerte mit den in Kap. I gefundenen entsprechenden Werten, so stellt sich heraus, dass die Richthöhenmethode nicht — auch nicht für feste Teilhöhenlagen angepasst — zuverlässigere Resultate gibt als die besten eindurchmessrigen Formeln. Dies dürfte seinen Grund hauptsächlich in dem unregelmässigen unteren Stammende haben. Dagegen zeigt der Brusthöhendurchmesser hier natürlicherweise (da ja das Richthöhenverfahren sich tatsächlich auf zwei Durchmesser stützt), eine teilweise recht viel grössere Stabilität der Resultate als derselbe Durchmesser bei der SMALIAN'schen Formel.

Sucht man ferner die den verschiedenen mittleren Koeffizientenwerten am nächsten liegenden einfachen Ersatzwerte auf, so erhält man hier folgende Koeffizienten nebst prozentischen Abweichungen von den erhaltenen Mittelwerten:

$$\begin{aligned} \text{Zwanzigstelhöhe:} & & \text{Brusthöhe:} & \\ \xi_k &= \frac{2}{3} ; \varphi_k = \frac{1}{2} ; \chi_k = 0.6 . & \xi_c &= 0.6 ; \varphi_k = \frac{2}{3} \text{ bzw. } = 0.7 ; \chi_c = \frac{1}{2} . \\ \text{Abw. ‰} &= -1.8 ; \quad = +0.9 ; \quad = -1.3 . & &= 0.6 ; \quad = -2.4 \quad \gg \quad = +2.5 ; \quad = -1.8 . \end{aligned}$$

Die für den theoretischen Rotationskörper hergeleiteten Koeffizienten in bezug auf die Zwanzigstelhöhe stimmen also nicht, wie auch

von vornherein angenommen werden konnte, mit den auf Grund des natürlichen Stammaterials erhaltenen Zahlenwerten überein. Dies rührt natürlich in erster Reihe von der Anschwellung des unteren Stammendes her. Die natürlichen Zahlenwerte sind selbstverständlich für die Praxis (hier also für den berindeten Kiefernnutzstamm) anzuwenden.

Vergleicht man ferner die für die Zwanzigstelhöhe erhaltenen echten und die für die Brusthöhe erhaltenen unechten Koeffizienten miteinander, so stellt sich heraus, dass jene niedriger als diese sind (der PRESSLER'sche Originalfall weist übrigens, mit der theoretischen Vorprüfung übereinstimmend, die kleinsten Unterschiede auf). Dies beruht natürlich darauf, dass die Zwanzigstelhöhe für das vorliegende Material unter der Brusthöhe liegt. Für längere Stämme als 26 m würde der entgegengesetzte Fall eingetroffen sein.

Auch andere Momente als die Stammlänge wirken auf die Grösse der Brusthöhenkoeffizienten ein. So z. B. kann man durch Einzeluntersuchung der erhaltenen Grundformzahlen eine gewisse Einwirkung des Standorts (also ausserhalb der der betreffenden Stammlängenveränderung) verspüren. — Eine genauere Analyse über die jeweilige Einwirkungsgrösse der verschiedenen Faktoren kann hier jedoch, wegen der Kleinheit des benutzten Stammaterials, nicht vorgenommen werden. Jedenfalls muss hervorgehoben werden, dass die Brusthöhenkoeffizienten also von Fall zu Fall wechseln, infolgedessen z. B. die hier erhaltenen mittleren Koeffizientenwerte nur als zufällige mittlere Formelkoeffizienten betrachtet werden dürfen, die neben besonders berechneten Spezialkoeffizienten für einheitliche Stammgruppen kaum allgemeiner in Frage kommen können.

Auch für die Zwanzigstelhöhe scheinen geringere systematische Gruppenunterschiede zum Vorschein gekommen zu sein. Für diesen Fall braucht man jedoch wohl, wie schon die verhältnismässig niedrigen Variationskoeffizientenwerte zeigen (2.9 ‰), derartige recht kleine Verschiebungen in den Zahlenwerten kaum in Betracht zu ziehen. Es dürften sich somit für diese Teilhöhenlage gut allgemeine mittlere Stammkubierungsformeln aufstellen lassen. Für den berindeten Kiefernnutzstamm würden diese Formeln also folgendermassen lauten:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} Gh \\ V &= \frac{1}{2} D^2 L \\ V &= 0.6 G \left(L + \frac{a}{2} \right) . \end{aligned}$$

Die angenehmste Formel dürfte die zweiterwähnte sein.

In der Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie ist die Arbeit der angeführten drei Formeln mittels des herangezogenen Probematerials durch prozentische Resultatabweichungen von den Grundvolumina näher veranschaulicht worden.

* * *

Wie in dem vorhergehenden Kapitel die Abhängigkeit der absoluten Grundformzahl F_0 von dem Verhältnis $\frac{h}{H}$ bei feststehendem $\frac{d}{D}$ -Wert untersucht wurde, kann es hier angebracht sein, die entsprechende theoretische Abhängigkeit der normalen Grundformzahl F_α von dem Verhältnis $\frac{h}{H-a}$ bei feststehendem $\frac{d}{D}$ -Wert zu betrachten.

Diese Untersuchung kann folgendermassen gemacht werden.

Erstens ist die Gleichung (28) mit der Substitution $\frac{d}{D} = \delta$ für r zu lösen. Es wird erhalten

$$(41) \quad r = \frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}.$$

Bei Substitution dieses Werts in die Formel (7) wird die gesuchte Abhängigkeitsgleichung erhalten. Sie lautet

$$(42) \quad F_{\alpha\delta} = \frac{1}{1 + \frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}} (1 - \alpha)^{-\frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}}.$$

Diese Formzahl ist in Fig. 14 graphisch durch ein Beispiel $\alpha = \frac{1}{20}$ in Verbindung mit $\delta = \frac{1}{2}$ veranschaulicht. Das Beispiel ist dasselbe, dessen Zahlenwerte (für $\frac{h}{H-a}$ zwischen 0.50 und 0.82) JUDEICH und PRESSLER seinerzeit veröffentlicht haben.¹

Die $F_{\alpha\delta}$ -Kurven sind in gewisser Hinsicht spezialisierte Arten

¹ FR. JUDEICH 1861, l. c. (S. 119.)
M. R. PRESSLER 1865, l. c. (S. 140.)

der F_α -Kurven in Fig. 7, diesen natürlicherweise auch in den allgemeinen Eigenschaften entsprechend. So nähern sich die verschiedenen $F_{\alpha\delta}$ -Kurven dem Wert Eins, wenn $\frac{h}{H-a}$ sich demselben Wert nähert, — wie vorher die F_α -Kurven, wenn r sich dem Wert Null näherte. Andererseits steigen die beiden Arten von Kurven in unendliche Höhe, wenn $\frac{h}{H-a}$ gleich Null, bzw. r gleich ∞ werden. Eine Asymptote der $F_{\alpha\delta}$ -Kurven steht also lotrecht für den Abszissenwert $\frac{h}{H-a} = \text{Null}$. Bei $\alpha = \text{Null}$ treffen die Kurven, die jetzt also absolut genannt werden ($= F_{0\delta}$; vgl. Fig. 10), für $\frac{h}{H-a} = \left(\text{d. h. } \frac{h}{H} = \right) \text{Null}$ den Nullpunkt.

Für die Minima der $F_{\alpha\delta}$ -Kurven erhält man weiter folgende Koordinaten:

$$(43) \quad \left(\frac{h}{H-a}\right)_{\alpha\delta_{mp}} = 1 - \delta^{-\frac{2 \log(1-\alpha)}{1 + \log(1-\alpha)}}$$

und

$$(44) \quad F_{\alpha\delta_{mp}} = -\log(1-\alpha) \cdot (1-\alpha)^{\left(1 + \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right)}.$$

Da die Formel (44) mit der Formel (11) identisch ist, liegen die Minima der $F_{\alpha\delta}$ -Kurven in gleicher Höhe wie die Minima der entsprechenden (gleiche α -Werte) F_α -Kurven.¹

¹ Weil in der Formel (44) der Faktor δ fehlt, liegen ferner alle $F_{\alpha\delta}$ -Minima für gleiches α , aber abwechselndes δ auf ein und derselben wagrechten Geraden. Für je einen α -Wert gibt es also eine Minimumgerade mit der Formel

$$F_{\alpha\delta_{mg}} = -\log(1-\alpha) \cdot (1-\alpha)^{\left(1 + \frac{1}{\log(1-\alpha)}\right)}.$$

Umgekehrt verschmelzen die Minimumpunkte der für festen δ , aber in bekannten Grenzen kontinuierlich verlaufenden α -Wert zusammengestellten $F_{\alpha\delta}$ -Kurvenserien zu Minimumkurven. Die allgemeine Formel aller dieser Kurven ist

$$F_{\alpha\delta_m} = \frac{1}{1 + \frac{2 \log \delta}{\log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}} \delta^{\frac{2}{2 \log \delta + \log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}}.$$

(Forts.)

IV

Diejenigen Stammkubierungsformeln, die sich auf zwei oder mehrere, in festen Teilhöhenlagen befindliche Durchmesser nebst der Ganzhöhe des Stammes basieren, können schliesslich auch im Anschluss an den in den vorhergehenden Kapiteln angewandten allgemeinen Formeltyp (5) etc. ausgedrückt werden, — doch mit dem Unterschied, dass der Formelkoeffizient nicht mehr konstant bleibt, sondern hier variabel ist.

Ein Teil der Minimumkurven ist ferner durch einen Inflexionspunkt

$$\left(\frac{h}{H-a}\right)_{\alpha_{\delta_{m_i p}}} = 1 - e^{-\left[\frac{3}{2} + \left(\frac{9}{4} - 2 \log \delta\right)^{\frac{1}{2}}\right] \delta^{-2}},$$

$$F_{\alpha_{\delta_{m_i p}}} = \left[1 + \frac{2 \log \delta}{\frac{3}{2} + \left(\frac{9}{4} - 2 \log \delta\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \delta^{-\frac{3}{2} + \left(\frac{9}{4} - 2 \log \delta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

charakterisiert, und vereinigt man noch diese Punkte, so erhält man endlich die Inflexionskurve der Minimumkurven der fraglichen Formzahlenkurven. Die Formel dieser Kurve lautet

$$F_{\alpha_{\delta_{m_i}}} = -\frac{e \log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)}{2 + \left[4 + \log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)^{2 + \frac{1}{\left[4 + \log \left(1 - \frac{h}{H-a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

Weil grössere Werte für δ als Eins (Zylinderwert) hier nicht in Frage kommen können, ist $1 - e^{-3}$ der obere Grenzwert für $\frac{h}{H-a}$, den die Inflexionskurve hier erreicht; der entsprechende Ordinatenwert ist daselbst Eins. Weil andererseits $\frac{h}{H-a}$ hier nicht unter Null sinken kann, bildet die $F_{\alpha_{\delta_m}}$ -Kurve für $\delta = e^{-2}$ die untere

Grenzkurve, die theoretisch einen Wendepunkt hat; dieser letzte Wendepunkt fällt mit dem Nullpunkt zusammen. (Vgl. S. 29 nebst Fussnote 2.) — Es sei noch erwähnt, dass auch die Inflexionskurve selber einen Inflexionspunkt besitzt.

Fig. 14 veranschaulicht die hier erörterten Verhältnisse für das folgende oben besprochene Beispiel: echte Formzahlenkurve $F_{\alpha_{\delta}}$ für $\alpha = \frac{1}{20}$ in Verbindung mit $\delta = \frac{1}{2}$; Minimumgerade $F_{\alpha_{\delta_{m g}}}$ für $\alpha = \frac{1}{20}$; Minimumkurve $F_{\alpha_{\delta_m}}$ für $\delta = \frac{1}{2}$; die Minimumkurven charakterisierende Inflexionskurve $F_{\alpha_{\delta_{m_i}}}$.

Die fragliche Formel lautet

$$(45) \quad V = \psi G H,$$

wo ψ die in Rede stehende variable Grösse bezeichnet. Die Formulierung dieser Grösse geschieht folgendermassen.

Werden die verschiedenen Kreisflächen einer mehrdurchmessrigen Kubierungsformel mit G_1, G_2, \dots und die den Kreisflächen gegebenen verschiedenen Koeffizienten mit a, b, \dots bezeichnet, so kann die in Rede stehende Stammkubierungsformel allgemein folgendermassen geschrieben werden (vgl. Fig. 4):

$$(46) \quad V = (a G_1 + b G_2 + \dots) H.$$

Wird weiter das rechte Glied dieser Gleichung mit einer in beliebiger Teilhöhenlage α befindlichen, zur Grundkreisfläche gewählten Kreisfläche G' erweitert, so geht die Gleichung in die Form

$$(47) \quad V = \left(a \frac{G_1}{G'} + b \frac{G_2}{G'} + \dots\right) G' H$$

über. Der Formel (45) gemäss wird hiernach der Faktor ψ durch die Gleichung

$$(48) \quad \psi_{\alpha} = a \frac{G_1}{G'} + b \frac{G_2}{G'} + \dots$$

gegeben. In welchen Hinsichten der Faktor ψ variabel ist, stellt sich ohne weiteres heraus.

Die theoretische Untersuchung der relativen Genauigkeit der üblichen mehrdurchmessrigen Stammkubierungsformeln geschieht diesmal durch Vergleichung der jeweils in Betracht kommenden ψ_{α} -Werte mit den entsprechenden normalen Formzahlenwerten der Formel (7).

Vom prinzipiellen Standpunkt aus ist es gleichgültig, auf welche normale Formzahl, d. h. auf welche Grundkreisfläche G' in jeweils bestimmter Teilhöhenlage, diese Vergleichung gegründet wird. Weil, wie erwähnt, die ψ_{α} -Werte in bezug auf keinen in echter Teilhöhe gewählten G' -Wert konstant bleiben können, scheint es hier am einfachsten zu sein, eine gemeinsame G' -Basis für alle Fälle zu wählen.¹

¹ Es sei erwähnt, dass auch der Koeffizient in Formel (8), der sich auf ein durchmessrige Kubierungsformeln bezieht, seinerseits nur für den G_{α} -Wert konstant ist, der in derselben Teilhöhenlage gewählt wird, auf welche sich die jeweilige Kubierungsformel bezieht, — für andere G' -Werte aber variabel ist. Vgl. Fig. 18 (die oberen Kurvenpaare).

Die auf diese Weise gewonnene normale Formzahl, die am vorteilhaftesten zu sein scheint, ist natürlich die absolute Formzahl F_0 , welche also die Basalkreisfläche zu ihrer Basis hat. Die Formel dieser Formzahl ist schon oben auf S. 11 angeführt (die Formel (9)). Die entsprechende Kurve ist auch sowohl in Fig. 7 wie in Fig. 8 graphisch dargestellt (die unterste Kurve). —

Die verschiedenen gegebenen Stammkubierungsformeln werden hier nach mit der Basalkreisfläche G' erweitert, einerlei ob sie sich selber u. a. auf diese Kreisfläche gründen oder nicht. Die Zahlenwerte der bezüglichen ψ_0 -Faktoren werden weiter für variierenden Formexponenten r berechnet und mit den entsprechenden F_0 -Werten verglichen.

Die ψ_0 -Ausdrücke für die verschiedenen fraglichen Kubierungsformeln sind zuerst anzugeben.

Löst man demgemäss Formel (20) in betreff des Verhältnisses $\frac{d}{D}$, und drückt man dabei h in Teilen von H aus, somit $\frac{h}{H} = \beta$ (vgl. oben $\frac{a}{H} = \alpha$), so erhält man erstens¹

$$(49) \quad \left(\frac{d}{D}\right)_{\beta}^r = (1 - \beta)^2,$$

woraus durch Quadrierung und Substitution $\left(\frac{d}{D}\right)_{\beta}^2 = \left(\frac{g}{G}\right)_{\beta}$ weiter

$$(50) \quad \left(\frac{g}{G}\right)_{\beta} = (1 - \beta)^r.$$

Die Variation dieser zwei Verhältniszahlen in bezug auf r ist in Fig. 15 und 16 beispielsweise für die »drei Stammitten«: die Hauptmitte $\beta = \frac{1}{2}$, die Untermittle $\beta = \frac{1}{4}$ und die Obermitte $\beta = \frac{3}{4}$ graphisch dargestellt.²

Wegen der näheren Untersuchung der beinahe unzähligen zur Anwendung vorgeschlagenen diesbezüglichen Stammkubierungsformeln dürfte es im vorliegenden Falle genügen, nur einige bekanntere Formeln zu prüfen.

Die Formeln werden hier sowohl nach der Anzahl der Durchmesser wie nach der Höhe ihrer untersten Durchmesser von der Basis geordnet.

¹ Das Verhältnis $\frac{d}{D}$ müsste hier eigentlich $\frac{D}{D}$ geschrieben werden. Um jedoch eine allgemeine Kontinuität mit den früheren entsprechenden Formeln zu erhalten, ist die Bezeichnung $\frac{d}{D}$ hier weiter beibehalten worden.

² Vgl. M. R. PRESSLER 1865, l. c. (S. 93 ff.)

Wie oben, werden nur Formeln für Vollkörper beachtet. Die für die Formeln erhaltenen ψ_0 -Werte werden neben die Formeln geschrieben. Beispielsweise werden folgende 10 Formeln (vier für zweidurchmessrige, ebenso vier für dreidurchmessrige und eine sowohl für vier- wie für fünfdurchmessrige Formeln) behandelt:^{1 2}

¹ Die NEWTON'sche Volumformel wurde zuerst von THIEN 1830, Ueber die Bestimmung der runden Hölzer, Allg. Forst- u. Jagd-Zeit., für Baumstammkubierungen vorgeschlagen. Später hat sie Fr. J. P. VON RIECKE 1849, Ueber die Berechnung des körperlichen Inhaltes unbeschlagener Baumstämme, für dieselben Zwecke in Vorschlag gebracht. — Nach U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 32.)

GAUSS, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. — O. SIMONY 1881, Ueber das Problem der Stammcubirung als Grundlage der Berechnung von Formzahlentabellen und Massentafeln. Mitth. a. d. forstl. Versuchswes. Österr., Bd. II. Statt der berechneten Teilhöhenlagen 0.2113 und 0.7337 sind die bequemen $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{5}$ allgemein in Anwendung genommen. — In diesem Zusammen-

hang sei auch die von POUKKA vorgeschlagene »Näherungsformel« $V = \frac{H}{2} (G_{\frac{1}{4}} + G_{\frac{3}{4}})$ erwähnt, die also weiter in die GAUSS'sche Näherungsformel einverleibt werden kann. K. A. POUKKA 1912, Täsmällisiä ja likiarvoisia kuutioimiskaavoja. (Mit deutschem Referat: Exakte und approximative Kubierungsformeln.) Suom. Metsänhoitoyhd. Julk. — Finska Forstför. Medd.

G. OETZEL 1892, Neue Formeln zur Berechnung des Rauminhalts voller und abgestutzter Baumschäfte. Wien und Leipzig.

A. SCHIFFEL 1902, Die Cubirung von Rundholz aus zwei Durchmessern und der Länge. Mitth. a. d. forstl. Versuchswes. Österr., H. XXVII. — Vgl. auch N. VON LORENZ 1902, Analytische Untersuchung der SCHIFFEL'schen Cubirungsformel. Cbl.

f. d. ges. Forstwes. — In der Formel ist $q = \sqrt{\frac{G_{\frac{3}{4}}}{G_{\frac{1}{4}}} = \frac{D_{\frac{3}{4}}}{D_{\frac{1}{4}}}$.

K. BREYMANN 1865. Oesterr. Vierteljahresschr. f. Forstwes. (S. 714.) — Nach U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 35.)

O. SIMONY 1881, l. c. — D e r s. 1901, Die näherungsweise Flächen- und Körperberechnung in der wissenschaftlichen Holzmesskunde. Mitth. a. d. forstl. Versuchswes. Österr., H. XXVI. — Statt der berechneten zwei äussersten Teilhöhenlagen

0.464 und 0.536 sind die bequemen $\frac{1}{7}$ und $\frac{6}{7}$ zur Anwendung vorgeschlagen.

A. SIVÉN 1887, Forstmatematiska bidrag. Finska Forstför. Medd.

O. SIMONY 1876. Cbl. f. d. ges. Forstwes. (S. 556.) — Nach U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 33.)

O. SIMONY 1881, l. c. Statt der berechneten Teilhöhenlagen 0.027, 0.4062, 0.5933 und 0.5973 werden für die Praxis die bequemen Verhältniszahlen 0.1, 0.4, 0.6 und 0.9 vorgeschlagen.

Die letzte Formel ist die fünf gleichlangen Sektionen angepasste HUBER'sche; sie
(Forts.)

NEWTON—THEN—V. RIECKE:

$$V = \frac{H}{6} (G_0 + 4G_{\frac{1}{2}}) \dots \psi_0 = \frac{1}{6} (1 + 2^{2-r})$$

GAUSS—SIMONY:

$$V = \frac{H}{2} (G_{\frac{1}{3}} + G_{\frac{4}{3}}) \dots \psi_0 = \frac{5^{-r}}{2} (4^r + 1)$$

OETZEL:

$$V = \frac{H}{9} (5G_{\frac{1}{3}} + 3G_{\frac{2}{3}}) \dots \psi_0 = \frac{4^{-r}}{3} (5 \cdot 3^{r-1} + 1)$$

SCHIFFEL:

$$V = H (0.61 + 0.62q^2 - 0.23q) G_{\frac{1}{3}} \dots \psi_0 = 4^{-r} (0.61 \cdot 3^r + 0.62 - 0.23 \cdot 3^r)$$

BREYMANN:

$$V = \frac{H}{8} [G_0 + 3(G_{\frac{1}{3}} + G_{\frac{2}{3}})] \dots \psi_0 = \frac{1}{8} [1 + 3^{1-r} (2^r + 1)]$$

SIMONY:

$$V = \frac{H}{3} (G_{\frac{1}{7}} + G_{\frac{2}{7}} + G_{\frac{6}{7}}) \dots \psi_0 = \frac{1}{3} [2^{-r} + 7^{-r} (6^r + 1)]$$

SIVÉN:

$$V = \frac{H}{8} [3(G_{\frac{1}{6}} + G_{\frac{5}{6}}) + 2G_{\frac{1}{2}}] \dots \psi_0 = \frac{2^{-r}}{8} [3^{1-r} (5^r + 1) + 2]$$

SIMONY:

$$V = \frac{H}{3} [2(G_{\frac{1}{4}} + G_{\frac{3}{4}}) - G_{\frac{1}{2}}] \dots \psi_0 = \frac{2^{-r}}{3} [2^{1-r} (3^r + 1) - 1]$$

SIMONY:

$$V = \frac{H}{4} (G_{\frac{1}{10}} + G_{\frac{4}{10}} + G_{\frac{6}{10}} + G_{\frac{9}{10}}) \dots \psi_0 = \frac{10^{-r}}{4} (9^r + 6^r + 4^r + 1)$$

HUBER (5-Sekt.); SIMONY:

$$V = \frac{H}{5} (G_{\frac{1}{10}} + G_{\frac{3}{10}} + G_{\frac{5}{10}} + G_{\frac{7}{10}} + G_{\frac{9}{10}}) \dots \psi_0 = \frac{10^{-r}}{5} (9^r + 7^r + 5^r + 3^r + 1)$$

kann aber auch als eine Näherungsformel der SIMONY'schen Formel $V = \frac{H}{5} (G_{0.0333} + G_{0.3127} + G_{0.5} + G_{0.6373} + G_{0.9162})$ angesehen werden. — O. SIMONY 1881, l. c.

² Vgl. auch T. HEIKKILÄ 1915, Huber'in kaavan käyttökelpoisuudesta ja eräistä uusista kuutioimistavoista. Metsätal. Aikakk. (L. pain.) — Forstl. Tidskr. (H.-uppl.)

Diese ψ_0 -Werte sind mit den entsprechenden F_0 -Werten in Fig. 17 verglichen worden. Die geringeren Verschiedenheiten dieser Werte sind in dem Massstab der Figur nicht ersichtlich. — Es sei noch an die für die abgestumpften Konoide aufgestellten Formeln NEWTON'S, OETZEL'S und BREYMANN'S, die also für den Zylinder exakt sind, erinnert.

Dass die theoretisch betrachtet sehr gute Übereinstimmung der ψ_0 -Werte der angeführten Formeln mit den F_0 -Werten an sich noch keine ebenso gute Formelanpassung für echtes Stammaterial garantiert, ist ohne weiteres klar.

Wie sich dieses Verhalten beispielsweise in betreff des hier benutzten Materials ausbildet, bzw. wie die verschiedenen Formeln eventuell zu verfeinern wären (vgl. die vorhergehenden Kapitel), ist hier, wegen des (im Vergleich zu der allgemein angewandten bequemen äquidistanten sektionsweisen Mittenflächenkubierung)¹ hauptsächlich akademischen Charakters dieser (d. h. der neun ersten) Formeln, nicht näher untersucht worden. Wie sich ferner die sektionsweise Mittenflächenkubierung zu der vorliegenden Frage verhält, dies von neuem zu untersuchen, ist hier nicht als besonders nötig erachtet worden.

* * *

Die bis jetzt aufgestellten, auf zwei oder mehrere teilfeste Stammdurchmesser bezüglichen Stammkubierungsformeln sind eigentlich nur für gefällte Stämme geplant und konstruiert worden. Es könnte aber bisweilen nützlich sein, derartige Formeln auch für wachsende Bäume zu haben, wenn nämlich durch sie bessere bzw. sichrere Ergebnisse als durch eindurchmessrige Formeln zu erhalten wären. Besonders dürften die auf zwei Durchmesser sich stützenden Formeln auch als recht bequem angesehen werden, wenn sie nämlich erstens die Hauptanforderung einer Formel für wachsende Bäume erfüllten, dass die Durchmesser wenigstens unter der halben, aber lieber nicht höher als in Drei-Zehntel- oder sogar als in Viertelhöhe (in Anbetracht der grösseren Stammhöhen und der direkten Durchmesserermittlung ohne Leiter) des Stammes liegen, — und zweitens, dass sie eine einfache Form besitzen und sich auf rechnerisch einfache Durchmesserhöhenlagen beziehen.

¹ Die letzte der angegebenen zehn Formeln ist ein Vertreter dieses Kubierungsverfahrens. Das »Grundvolumen« des hier benutzten Stammaterials ist desgleichen, wie erwähnt, durch dieses Verfahren (Einmetersektionen) zustande gekommen.

Es stösst ja natürlich auf keine Schwierigkeit, derartige Formeln z. B. gerade mit zwei Durchmessern zu konstruieren. Z. B. aus den in dem ersten Kapitel dieser Studie angeführten Formeln mit dem Durchmesser unter der halben Stammhöhe kann eine Mehrzahl von recht einfachen Formeln kombiniert werden. Eine andere Frage ist die, dass die oben zuerst angeführte Bedingung kaum erlaubt, theoretisch vollendete Formeln aufzustellen. Diese Forderung ist jedoch nicht die primärste; es gilt ja jetzt, in der Gegebenheit nach Möglichkeit nur gute Formeln für die Praxis zu entwickeln.

In der Aufstellung derartiger Formeln ist zu beachten, dass man, um eine gute Kombination zu erhalten, diejenigen eindurchmessrigen Formeln, die einander in betreff des Vorzeichens der in der Frage etwa wichtigsten Abweichungen der F_k -Werte von den entsprechenden F_α -Werten hauptsächlich entgegengesetzt sind, durch additive und die unter sich gleichartigen Formeln durch subtraktive Abwägung kombiniert. So dürften z. B. die Teilhöhenkombinationen $0 - -0.4$, $0 - -\frac{1}{3}$, $0.2 - -0.4$, $\frac{1}{6} - -\frac{1}{3}$, ... zu der erstgenannten und z. B. die Kombinationen $0 - -\frac{1}{4}$, $0 - -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10} - -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} - -0.4$, ... zu der zweiten Kombinationskategorie gehören. Vgl. Fig. 7 sowie Fig. 18 (die oberen Kurvenpaare). Die Wägung kann natürlich frei in betreff der Durchmesserkreis- oder -quadratflächen (vgl. S. 17) sowie durch verschiedenartige Mittelwertberechnungen ausgeführt werden.¹ Es heisst nur die je möglichst einfachen und bequemen guten Formeln finden.²

Die Grössen der jeweils anzuwendenden Grundformelkoeffizienten sind schon in dem ersten Kapitel dieser Studie im grossen und ganzen gegeben worden; nur kleinere, von einer einfachen Formelform bedingte Abschleifungen können hier noch in Frage kommen.

Jetzt gilt es also hauptsächlich, nur die relative Fallstärke der neuen Kurven durch verschieden gestellte Wägung der jeweils benutzten Paarformeln zu bestimmen. In dieser Hinsicht soll die Hauptregel befolgt werden, dass diejenige von den zwei in Frage kommenden Grundformeln, welche die kleineren hier etwa bedeutungsvollen Differenzen $F_\alpha - F_k$

¹ Es sei z. B. an die oben angeführte NEWTON'sche Formel erinnert, die eine zu der ersten Kategorie gehörende, aus einer SMALIAN'schen und zwei HUBER'schen Formeln arithmetisch abgewogene Formel ist.

² Die arithmetische Abwägung gibt wohl im allgemeinen die einfachsten Formeln.

bzw. $F_0 - \psi_0$ besitzt, stärker betont werden müsste. In den subtraktiven Formeln wird also diese selbe Formel der Minuend sein. — Sonst muss die endgültige Wägung durch Ausprobierung durchgeführt werden.

Von den sehr vielen zweidurchmessrigen Formeln allerlei Kombinationen, die auf diese Weise aufgestellt werden können, mögen nur ein paar der beiden Kategorien hier erwähnt und veranschaulicht werden, z. B. die folgenden Kreisflächen-, Quadratflächen- sowie gemischten Kubierungsformeln:

Additive zweidurchmessrige Kubierungsformeln:

$$V = \frac{H}{3} (D_{0.4}^2 + G_{0.2}) \dots \dots \dots \psi_0 = \frac{4 \cdot 5^{-r}}{3} \left(\frac{3^r}{\pi} + 4^{r-1} \right)$$

$$V = \frac{H}{2} (D_{\frac{1}{3}}^2 + 0.2 D_{\frac{1}{6}}^2) \dots \dots \dots \psi_0 = \frac{2}{\pi} 6^{-r} (4^r + 0.2 \cdot 5^r).$$

Subtraktive zweidurchmessrige Kubierungsformeln:

$$V = H (D_{\frac{1}{4}}^2 - \frac{1}{3} D_{\frac{1}{6}}^2) \dots \dots \dots \psi_0 = \frac{1}{\pi} 3^r (4^{-r} - 0.1 \cdot 0.3^{r-1})$$

$$V = H (G_{\frac{1}{4}} - 0.2 G_0) \dots \dots \dots \psi_0 = \left[\left(\frac{3}{4} \right)^r - 0.2 \right].$$

Vgl. Fig. 18. (Dasselbst sind auch einige ψ_0 -Kurven der grundlegenden eindurchmessrigen Kubierungsformeln veranschaulicht.)

Um zu erfahren, wie derartige Formeln für echtes Stammaterial arbeiten, wurden beispielsweise die späteren Formeln der zwei Formelkategorien mittels des hier benutzten Stammaterials näher untersucht.

Die erhaltenen Mittelabweichungen und Dispersionswerte waren: für die erstere Formel $\left(\frac{1}{3} - -\frac{1}{6} \right)$: +0.7 und 2.5 % und für die letztere $\left(\frac{1}{4} - -\text{Brusthöhe} \right)$: +0.3 und 2.5 %. Die Einzelresultate der letzteren Formel sind in der Kubierungstabelle am Schluss dieser Studie vermerkt; daraus sind auch die mittleren Fehler ersichtlich.

Die erhaltenen Dispersionswerte sind wohl numerisch etwas niedriger als die entsprechenden Werte der besten eindurchmessrigen Grundformeln, aber der Unterschied kann doch nicht als signifikant bezeichnet werden, da er gut innerhalb der Zufallsgrenzen fällt. Die in Frage gestellte höhere Stabilität der Kubierungsergebnisse ist hier also wenigstens nicht durch die niedrigen zweidurchmessrigen Formeln im Vergleich zu den entsprechenden besten eindurchmessrigen Formeln erreicht worden. In

dieser Hinsicht lohnt es sich also kaum, von einer guten eindurchmessrigen zu einer zweidurchmessrigen Formel überzugehen.¹

Von einem anderen Gesichtspunkt aus beurteilt, scheint jedoch eine gut zusammengestellte zweidurchmessrige Formel im Vergleich zu den entsprechenden eindurchmessrigen Formeln einen gewissen Vorteil bieten zu können. Wenigstens für das jetzt untersuchte Material hat z. B. die in der Kubierungstabelle näher veranschaulichte Formel

$$V = H(G_{\frac{1}{4}} - 0.2 G_{1.3})$$

die etwaigen systematischen Abweichungen, die die eindurchmessrigen Formeln in betreff der Standorte bzw. der Stammgrößen gezeigt haben, recht gut ausgeglichen; die Fehler sind in jeder Stammreihe regellos abwechselnd positiv und negativ.

Würde eine ausgedehntere Untersuchung diese, übrigens recht plausibel erscheinende Wahrnehmung bestätigen können, so könnte den zweidurchmessrigen Formeln entsprechend ein gewisser Vorzug zugesprochen werden. In diesem Sinne würde auch der hier erhaltene, als sehr niedrig zu bezeichnende Dispersionswert symptomatisch als noch signifikanter betrachtet werden können.

Vergleicht man ferner die additiven und subtraktiven Formeln miteinander, so ist ohne weiteres klar, dass nur die niedrigen subtraktiven Formeln für wachsende Bäume (wie gesagt in Anbetracht der grösseren Stammhöhen und der direkten Durchmesserermittlung ohne Leiter) in Frage kommen können.

Eine besonders gute obere Durchmesserlage in betreff einer derartigen Formel scheint, wie schon in Kap. I hervorgehoben wurde, die »Untermittte«, d. h. die Viertelhöhe zu sein. Eine entsprechend »echte« zweidurchmessrige Formel erhält man z. B. durch die Kombination $\frac{1}{4} - \frac{1}{10}$, und eine »unechte« am besten durch die bekannte Zusammenstellung $\frac{1}{4} -$ — Brusthöhe (jedoch nur für grössere Stämme). Gerade diese zwei Fälle sind oben durch die zwei subtraktiven Formeln in Betracht gezogen worden.

¹ Andererseits sei an das an sich recht kleine Dispersionsmass einiger eindurchmessrigen Formeln im Zusammenhang mit dem hier benutzten Stammaterial aufmerksam gemacht, welche enge Streuung als solche nicht sehr leicht wirklich entscheidend kleiner gemacht werden kann. Die Frage der Stabilität der zwei in Rede stehenden Formelarten im Verhältnis zueinander kann endgültiger nur durch weitläufigere Kontrollkubierungen entschieden werden.

Die genannte unechte Formel ist natürlich die bequemere der beiden Formeln. Schlecht hat sie trotz ihrer Unechtheit auch nicht gearbeitet, wie schon oben gezeigt wurde (vgl. die Kubierungstabelle); ausserdem ist sie sehr einfach. Sie gründet sich also auf die sog. *unechte Untermittlenformelklasse* (vgl. S. 42), die bisweilen als Hilfszeiger für die Hauptformelklasse angewandt worden ist.

Es scheint nun, wenigstens auf Grund der jetzt gewonnenen Ergebnisse, als böte die Hauptformelklasse in gewöhnlicher Anwendung nicht nur eine unbequemere, sondern auch wegen der Schwierigkeit, diese Formelklassengrösse für stehende Stämme (von kleinerer abgesehen) ohne Leiter oder gute Dendrometer sicher zu bestimmen, eine unsichrere Basis für die Kubierung solcher Stämme als die als Hilfszeiger benutzte Untermittlenformelklasse an sich. — Weitere ausgedehntere Untersuchungen werden wohl diese Beziehungen näher klarlegen können.

* * *

Gilt es, die echten Formzahlenwerte in bezug auf variierende $\frac{d}{D}$ - und feste $\frac{h}{H-a}$ -Werte theoretisch anzugeben, so sind die Grundformeln auch hierfür oben gegeben worden.

Für die diesbezügliche absolute Formzahl $F_{0\beta}$ wird aus Formel (25) die Formel

$$(51) \quad F_{0\beta} = \frac{1}{2 \log \frac{d}{D} + \log(1-\beta)}$$

erhalten, wenn statt fester δ - und variierender $\frac{h}{H}$ -Werte variierende $\frac{d}{D}$ - und feste β -Werte eingesetzt werden.

Für die Normalformzahl $F_{\alpha\beta}$ wird entsprechend aus der Formel (42), wenn das Verhältnis $\frac{h}{H-a}$ durch β und δ durch $\frac{d}{D}$ ersetzt wird, die Formel

$$(52) \quad F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2 \log \frac{d}{D} + \log(1-\beta)} (1-\alpha)^{-\frac{2 \log \frac{d}{D}}{\log(1-\beta)}}$$

erhalten, wo also F echt sowohl in betreff der Höhe a wie der Höhe h

ist. Für $\alpha = \text{Null}$ geht diese Formel in die Formel (51), wie oben die Formel (42) in die Formel (25) über.

In Fig. 19 und 20 sind diese beiden Formzahlenarten durch einige Kurvenbeispiele veranschaulicht. Die erstere Figur stellt die absolute Formzahl für beispielsweise $\beta = \frac{1}{4}, = \frac{1}{2}$ und $= \frac{3}{4}$ dar, — die letztere die Normalformzahl für die Kombination $\alpha = \frac{1}{4}$ mit $\beta = \frac{2}{3}$, welche Kombination also die Variation der Formzahl $F_{\frac{1}{4}}$ in betreff des obenangeführten SCHIFFEL'schen Faktors $q = \frac{D_{\frac{3}{4}}}{D_{\frac{1}{4}}}$ veranschaulicht.

Über die Eigenschaften der Kurven (51) und (52) ist in der Hauptsache dasselbe zu sagen wie über die entsprechenden Kurven der Formeln (25) und (42) weiter oben. Es wird daher dorthin verwiesen. Doch seien hier die den Formeln (26), (27) und (43), (44) entsprechenden Formeln entwickelt und vermerkt.

Für die Koordinaten des Inflexionspunkts der Kurve (51) erhält man die Formeln

$$(53) \quad \left(\frac{d}{D}\right)_{0, \beta_{ip}} = e^{-2} (1 - \beta)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$(54) \quad F_{0, \beta_{ip}} = -\frac{1}{4} \log (1 - \beta).$$

Vgl. Fig. 19.¹

Für die Koordinaten des Minimumpunkts der Kurve (52) erhält man andererseits die Formeln

¹ Löst man weiter β aus der Gleichung (53) und substituiert diesen β -Wert in Formel (51), so erhält man die Formel der zu einer Inflexionskurve verschmolzener Inflexionspunkte

$$F_{0, \beta_i} = 1 + \frac{1}{2} \log \frac{d}{D}.$$

Weil $\frac{d}{D} = 1$ dem Zylinder entspricht, ist der grösste Wert, der für β gemäss Formel (53) hier in Frage kommen kann, $= 1 - e^{-4}$. Für die entsprechende Kurve liegt der Inflexionspunkt in dem »Zylinderpunkt«. Ihren Treffpunkt mit der Abszissenachse ($F_{0, \beta_i} = 0$) hat die Inflexionskurve andererseits, wie ersichtlich, in dem Punkt $\frac{d}{D} = e^{-2}$.

Wie sowohl aus den einander entsprechenden Formeln (25)—(27) — (51), (53)—(54) als auch aus den Figuren 10 und 19 ersichtlich, sind die zwei analysierten F_0 -Kurvenarten in gewisser Hinsicht von entgegengesetztem Charakter.

$$(55) \quad \left(\frac{d}{D}\right)_{\alpha, \beta_{mp}} = (1 - \beta)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \log(1 - \alpha)}\right)}$$

und

$$(56) \quad F_{\alpha, \beta_{mp}} = -\log(1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha)^{\left(1 + \frac{1}{\log(1 - \alpha)}\right)}.$$

Vgl. Fig. 20.¹

V

Der Vollständigkeit halber seien zuletzt noch gewisse gröbere Annäherungsformeln für das Stammkubieren, in welchen, wenigstens formal, entweder der Durchmesser oder die Stammhöhe fehlt, kurz behandelt. Auch diese Formeln können nämlich noch in einen gewissen Zusammenhang mit dem hier untersuchten Fall der Stammkubierung gesetzt werden. — Vgl. Fig. 5 und 6.

Ein Verfahren, Baumstämme zu kubieren, bei dem die Kreisfläche der HUBER'schen Mittenflächenformel durch eine variable Grösse ersetzt ist, hat PUTICK ausgearbeitet.²

Wird die fragliche Variable mit b bezeichnet, so lautet die Formel PUTICK's

¹ Die Formel (56) ist also zugleich die Formel der diesbezüglichen Minimumgeraden $F_{\alpha, \beta_{mg}}$, d. h. die gemeinsame Formel der Minimumpunkte aller derjenigen

Kurven (52), die je einen gleichen α -Wert, aber verschiedene β -Werte besitzen. Diese Formel ist identisch mit den Formeln (11) und (44). (Vgl. S. 39 Fussnote.)

Für die entsprechenden Minimumkurven, welche aus den verschiedenen Minimumpunkten für je konstanten β -Wert und in bekannten Grenzen kontinuierlich variierenden α -Wert entstehen, erhält man, wie oben (S. 39 Fussnote), die Formel

$$F_{\alpha, \beta_m} = \frac{1}{1 + \frac{2 \log \frac{d}{D}}{\log(1 - \beta)}} \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{2 \log \frac{d}{D} + \log(1 - \beta)}}.$$

Fig. 20 veranschaulicht die hier erörterten Verhältnisse für das folgende oben besprochene Beispiel: echte Formzahlenkurve $F_{\alpha, \beta}$ für $\alpha = \frac{1}{4}$ in Verbindung mit $\beta = \frac{2}{3}$;

Minimumgerade $F_{\alpha, \beta_{mg}}$ für $\alpha = \frac{1}{4}$; Minimumkurve F_{α, β_m} für $\beta = \frac{2}{3}$.

² PUTICK 1911, Ueber Stammkubierungen. Oesterr. Forst- u. Jagd-Zeit.

$$V = bH. \quad (\text{PUTICK.})$$

Für die Bestimmung des Wertes des Faktors b ist der Durchmesser in der Stammitte zu messen, wonach der Faktor b aus einer Tabelle zu entnehmen ist. Weil die Tabellenwerte natürlicherweise für die verschiedenen Mittendurchmesser den entsprechenden Kreisflächen gemäss ausgerechnet sind, ist das Verfahren nur eine Variante des gewöhnlichen Mittenflächenverfahrens und kann somit hier vernachlässigt werden.

Eine Formel, in welcher ferner die *S t a m m h ö h e* eliminiert ist, hat z. B. FISCHER konstruiert.¹ Seine sog. »Zehnerregel« lautet

$$V = 40 D^3. \quad (\text{FISCHER.})$$

Diese Formel wird aus der obenangeführten AMGWERT'schen, durch den Näherungswert 3.2 für π der umgestellten SMALIAN'schen Formel, $V = 0.4 D^2 H$ (vgl. S. 9 Fussnote) erhalten, wenn statt H der 100-fache Durchmesser eingesetzt wird. Die Regel ist also in gleicher Weise wie die Formel SMALIAN-AMGWERT's zu akkommodieren.

Für Stämme, welche der Gleichung $H = 100 D$ nicht entsprechen, ist die Regel mit Korrekturen zu benutzen. Diese werden jedoch recht unbequem, im Vergleich nämlich z. B. zu der einfachen, der FISCHER'schen Regel zugrundeliegenden vollausgebildeten SMALIAN-AMGWERT'schen Formel selbst. — Diese Regel nebst ihren von FISCHER angeführten verschiedenartigen Varianten und Korrekturen bedarf somit hier keiner näheren Erörterung.

Eine andere Näherungsformel dagegen, die wenigstens hinsichtlich der korrektiven Behandlung in einer einigermaßen vorteilhafteren Lage als die FISCHER'sche Regel sein dürfte, ist die ein halbes Hundertjahr alte bekannte DENZIN'sche Formel, die hier folgendermassen zu schreiben ist (der Durchmesser, wie überall, in Metern zu bezeichnen):²

$$V = 10 D^2. \quad (\text{DENZIN.})$$

Diese Formel lässt sich aus jeder anderen eindurchmessrigen Kubierungsformel herleiten, wenn nur die Höhe H in passender Grösse

¹ FISCHER 1915, Zur Schätzung des Festgehalts von Bäumen und Rundhölzern. Allg. Forst- u. Jagd-Zeit.

² DENZIN benutzte seine Formel schon vom Jahre 1875 an, publizierte sie aber erst 1884 in F. Bl. (S. 399.) — Nach U. MÜLLER 1923, l. c. (S. 247.)

konstant gemacht wird. Z. B. in dem Fall $\alpha = \text{Null}$ muss diese Höhe H_k für den gemeinen Kegel 38.20, für das Paraboloid 25.46 und für den Zylinder 12.73 m sein. Wird ebenso in die hier oft erwähnte SMALIAN'sche Formel die Ersatzzahl 3.2 für π eingesetzt, so ist die erforderliche Höhe, für welche sich die fragliche Formel ergibt und für welche sie somit auch exakt ist, 25 m, — wenn nämlich die entsprechende absolute Formzahl in der Rotationskonoidvergleichung von der Grösse 0.509 ist. (Vgl. S. 9 Fussnote.) Für die auch oben angeführte HERSCHE'sche Formel sind die entsprechenden Zahlenwerte $H_k = 30$ m und $F_0 = 0.424$. USW.

Um annähernd richtige Werte für verschieden lange Stämme und verschieden ausgebildete Bäume (Holzarten) zu erhalten, hat DENZIN verschieden gestellte mittlere prozentische Korrekturen für die Praxis in Vorschlag gebracht, nämlich in betreff der Formelanpassung in der Brusthöhe.

Z. B. für den oben angeführten theoretischen Fall: $\alpha = 0$, $F_0 = 0.5$, $H_k = 25$ m, würde die Korrektur pro von der Grundhöhe H_k abweichenden Höhenmeter ± 4 % sein, plus, wenn die Höhe grösser, minus, wenn sie kleiner als 25 m ist. Wenn man hiernach die mit der Korrektur erweiterte DENZIN'sche Formel niederschreibe, würde sie somit folgendermassen lauten:

$$V = 10 D^2 [1 + (H - 25) 0.04].$$

Führt man in dieser Gleichung die Rechnungen durch, so ergibt sich daraus

$$V = 0.4 D^2 H,$$

d. h. — die angeführte SMALIAN-AMGWERT'sche Kubierungsformel.

Es fragt sich somit, zu was eigentlich das DENZIN'sche Annäherungskubieren nützt, wenn die notwendige Korrektur das Verfahren umständlicher macht als die Anwendung der einfacheren vollausgebildeten Kubierungsformeln.

Ohne hier das DENZIN'sche Verfahren zu weiterer Anwendung speziell empfehlen zu wollen, mag aus Anlass des Gesagten ein anderes Korrekturverfahren, das, obgleich auch nicht so sehr bequem, wenigstens die ursprünglich einfache Formel als solche beibehält, angeführt werden.

Für Körper, die kürzer als die für die Formel geltende Grundhöhe H_k für $\alpha = 0$ sind, kann die Korrektur direkt durch Aufwärtsverschiebung der Durchmesserermittlungsstelle vorgenommen werden. Es ist somit zu berechnen, wie hoch der Durch-

messer für je eine Höhe hinsichtlich der jeweiligen mittleren Körperform zu nehmen ist, d. h. die Gleichung (vgl. Formel (3) weiter oben)

$$\frac{\left(1 - \frac{a}{H}\right)^{-r}}{1+r} \frac{\pi}{4} D^2 H = 10 D^2$$

in betreff $\frac{a}{H} = \alpha$, bzw. a zu lösen, wenn für r und danach für H bestimmte Werte gegeben sind.¹

Um nur allgemeine mittlere Näherungswerte herzuleiten, dürfte der Wert Eins gegeben werden können, und um die Berechnung dazu möglichst einfach zu machen, kann man wohl auch π den Näherungswert 3.2 geben. Durch weitere Lösung in betreff α bzw. a vereinfacht sich die aufgestellte Gleichung also folgendermassen:

$$(57) \quad \alpha = 1 - \frac{H}{25},$$

bzw.

$$(58) \quad a = \left(1 - \frac{H}{25}\right) H.$$

Aus Formel (57) ist leicht zu ersehen, dass für je $2\frac{1}{2}$ m Höhenverminderung (von 25 m an beginnend) die Ermittlungsstelle des Durchmessers um $\frac{1}{10}$ der Höhe aufwärts rückt. Entsprechend rückt diese Stelle im Anfang auch absolut höher, kulminiert aber in halber Höhe für den H -Wert $\frac{25}{2}$ m, um dann wieder gegen den Nullpunkt zu sinken.

Die Höhenlagen des für die DENZIN'sche Formel geltenden »Gleichgewichtsdurchmessers« sind in Fig. 21 im Verhältnis zu der variierenden Körperhöhe näher veranschaulicht.

Korrekturen für Körper, die höher als die Grundhöhe H_k sind, lassen sich ihrerseits durch entsprechende künstliche Vergrößerung des Basaldurchmessers ausführen, sind aber durch spezielle Berechnungen zu entnehmen und bezeichnen somit keine weitere Erleichterung der Korrekturenfrage. Für den wirklichen Stamm, für welchen die hier berechnete theoretische Nullhöhe im allgemeinen durch die Brusthöhe ersetzt wird, können jedoch einigermassen grössere Durchmesser durch weitere Verschiebung der Ermittlungsstelle gegen den Boden erhalten werden. —

¹ Auch Formverschiedenheiten können natürlich durch entsprechende Verschiebungen eliminiert werden.

Eine Veränderung der ursprünglichen Regel z. B. in die Form $V = 20 D^2$ und eine neue Berechnung des α -Werts hinsichtlich des entsprechenden Ausdrucks $1 - \frac{H}{50}$ würden ihrerseits den einzigen Sinn — die Einfachheit — des DENZIN'schen Verfahrens zerstören. —

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass auch die gewöhnliche Kreisflächentafel für gegebene Durchmesserwerte als Stammkubierungstafel anzuwenden ist.

Analog der DENZIN'schen Formel wird die Kubierungsformel

$$V = 10 G$$

aufgestellt und die Ermittlungsstelle des Durchmessers entsprechenderweise hiernach gesucht. Es werden die Akkommodierungsformeln für das Paraboloid genau

$$(59) \quad \alpha = 1 - \frac{H}{20},$$

bzw.

$$(60) \quad a = \left(1 - \frac{H}{20}\right) H$$

erhalten. Die Grundhöhe ist jetzt also 20 m, und für je 2 m Höhenverminderung verschiebt sich die Ermittlungsstelle des Durchmessers um $\frac{1}{10}$ der Höhe aufwärts. Die absolute Höhe dieser Stelle kulminiert bei 5 m für den 10-metrigten Körper. Vgl. Fig. 21.

Das Volumen in m^3 wird somit aus der Kreisflächentafel direkt erhalten, wenn in der dem jeweiligen Durchmesser entsprechenden m^2 -Zahl das Dezimalkomma einen Schritt nach rechts verschoben wird.

Wie diese zwei zuletzt angeführten Formeln in der vorgeschlagenen Anpassungsform für das benutzte Stammaterial gearbeitet haben, geht aus der Kubierungstabelle hervor.

Die Sicherheit im Einzelnen kann natürlicherweise nicht sehr gross sein, besonders wenn längere Stämme als die Grundhöhe zu kubieren sind. Demgemäss sind die längsten Stämme des Materials für die letztere der zwei Formeln verhängnisvoll gewesen; versuchsweise ist hier betreffs der Durchmesserermittlung auch nicht unter die Brusthöhe herabgegangen worden. Die Dispersionszahl ist auch besonders für die zweite Formel recht hoch. — Elastischere, zu sichreren Resultaten führende Regeln als die hier formulierten könnten für die Aufwärtsverschiebung des Durch-

messers direkt aus echtem Stammaterial hergeleitet werden. Für diesen Zweck ist jedoch das jetzt benutzte Material zu klein. An sich würde gleichwohl das Kubierungsverfahren derart verfeinert nur noch unbequemer werden.

Fasst man zum zweiten die erhaltenen Gesamtmittelwerte ins Auge, so sind die Resultate als befriedigend anzusehen. Es ist freilich ein Zufall, aber das formal beste Mittelwertergebnis der hier angestellten Vergleichskubierungen ist gerade aus der DENZIN'schen Formel in der neuen Anpassungsform entsprungen, — eine Gesamtmittelwertabweichung von dem Grundvolumen, die fast Null ist.

Kubierungstabelle

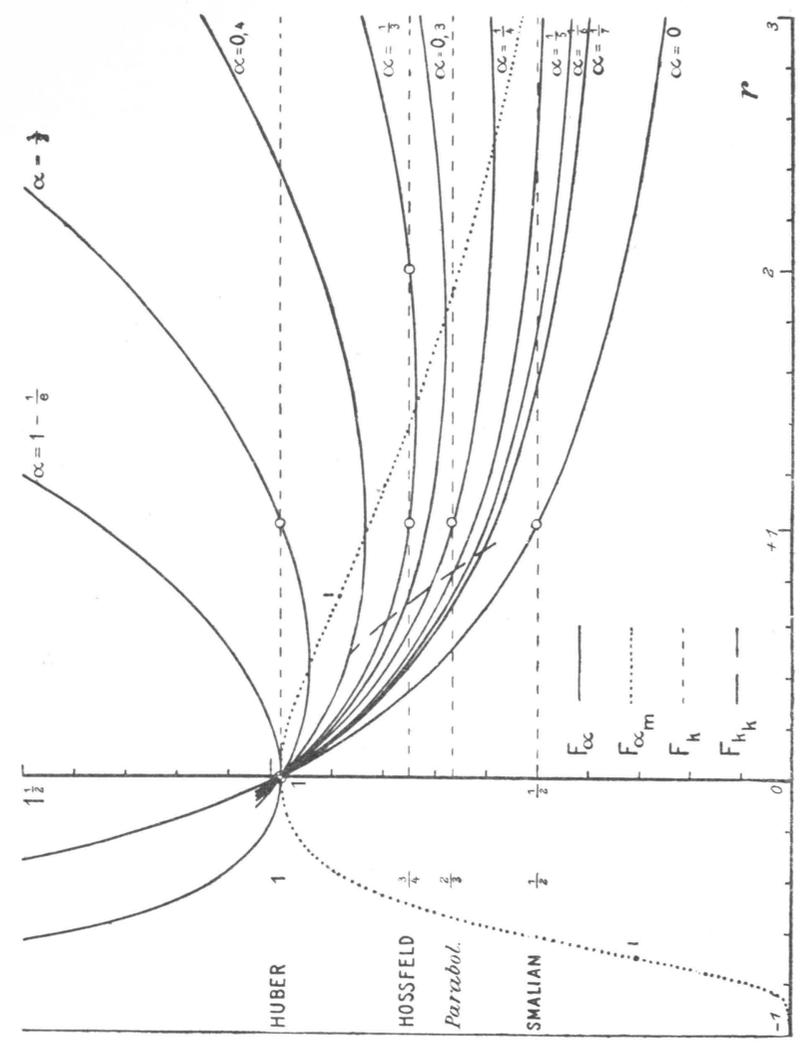
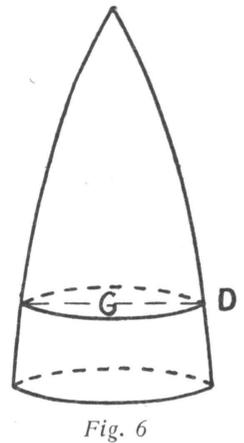
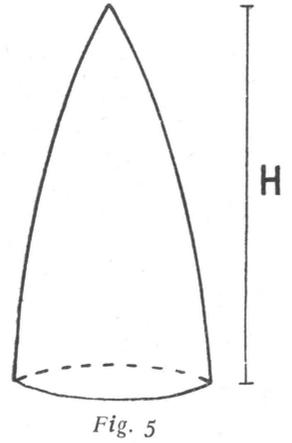
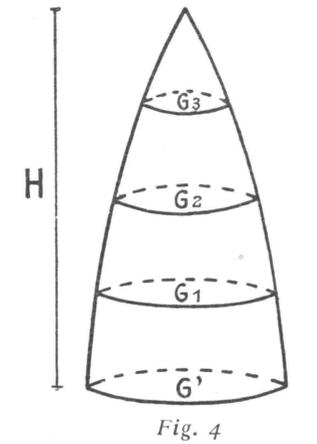
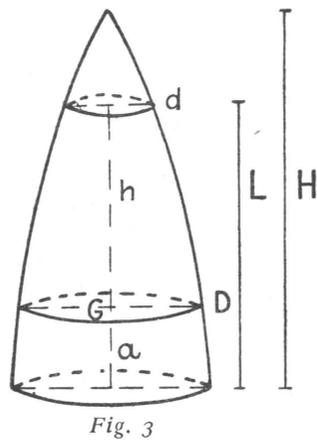
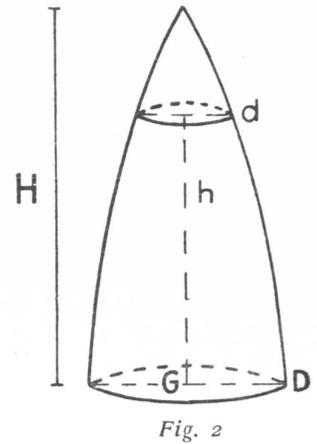
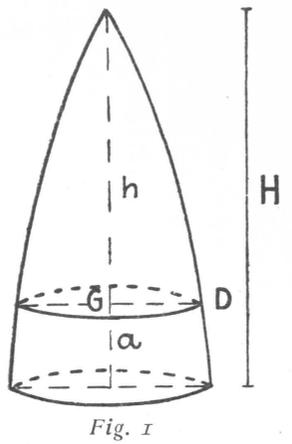
Graphische Tafeln

Volumzahlen einzelner Kiefernstämmen mit Rinde.

Stammdurchmesser in 6 m Höhe vom Boden, Engl. Zoll	Waldtyp	Stammhöhe, m	Grundvolumen, Einmetereckweise Kubierung nach der Mittelflächenformel, m ³	Aus dem Grundvolumen berechnete prozentische Abweichungen der Volumina folgender Kubierungsformeln:															
				Teilhöhe der Durchmesserlage								Durchmesser in							
				1/2	0.4	1/3	0.3	1/4	1/5	1/6	1/7	Brusthöhe	Zwanzigstelhöhe		Viertel- und Brusthöhe	wechselnder Höhenlage			
				$V = 0,8 D^2 H$	$V = \frac{2}{3} D^2 H$	$V = 0,8 GH$	$V = 0,6 D^2 H$	$V = 0,7 GH$	$V = \frac{2}{3} GH$	$V = \frac{1}{2} D^2 H$	$V = 0,6 GH$	$V = \frac{1}{2} GH$	$V = \frac{2}{3} Gh$	$V = \frac{1}{2} D^2 L$	$V = 0,6 G (L + \frac{a}{2})$	$V = H (G_1 - 0,3 G_1,3)$	$V = 10 D^2$	$V = 10 G$	
5"	CIT	11—12 1/2	0.155	-0.7	-3.6	-3.4	-5.2	-8.1	-7.6	-7.1	-7.7	-15.8	+4.1	+6.0	+3.1	-2.5	-0.9	-9.1	
			0.158	-4.1	-4.8	-3.0	-3.7	-4.4	-1.9	+2.1	+1.5	+1.5	-11.5	+1.3	+4.6	+2.2	+2.8	+2.2	-5.0
			0.161	-4.8	-5.4	-2.1	-0.3	-1.4	+2.1	+4.9	+4.2	-8.1	-2.8	-0.2	-2.1	+3.9	+0.2	-5.5	
			0.162	-3.8	-5.8	+0.5	+0.9	-1.1	+2.3	+2.6	+2.6	-7.7	+0.2	+2.9	+0.3	+2.2	+4.3	-3.7	
	VT	14 1/2—16	0.165	+1.4	-3.6	-3.5	-2.4	-5.1	-1.9	-0.8	-4.5	-11.5	-1.3	+0.5	-2.0	+0.4	-0.5	-6.5	
			0.167	+0.1	-4.8	-3.4	-3.7	-6.3	-4.3	-2.0	-4.0	-6.2	+1.8	+4.3	+1.9	-3.5	-1.8	-7.7	
			0.168	-0.3	-3.9	-2.1	-2.4	-3.6	-2.6	-0.8	-1.6	-3.1	+2.1	+5.5	+2.9	-1.2	-5.3	-9.4	
			0.172	-1.4	-2.7	-1.0	-1.2	-4.2	-3.2	-0.9	-2.8	-0.4	+2.9	+6.0	+3.4	-3.2	-1.7	-9.2	
	OMT	18—19 1/2	0.180	+0.8	-0.7	+1.5	+1.6	0.0	+2.6	+5.1	+4.3	+6.8	-2.1	+1.0	-1.0	-0.1	-4.7	+8.8	
			0.182	-3.3	-4.2	+1.4	-0.1	-1.4	+1.2	+2.4	0.0	+0.4	-2.8	-0.3	-2.6	+0.8	-5.9	+0.9	
			0.184	-3.2	-2.7	+1.5	+1.7	+1.9	+4.7	+5.8	+5.3	+10.4	-2.5	+0.3	-1.6	+1.1	-1.0	+16.2	
			0.194	-0.8	-3.7	-1.2	-1.0	-1.0	+3.1	+6.7	+6.6	+7.3	+0.5	+3.4	+1.0	-1.6	+0.9	+10.1	

10"	CIT	15 1/2—17	0.633	+3.0	+3.2	+6.8	+6.0	+2.2	+2.6	+3.6	+0.3	-5.1	-6.3	-3.6	-5.6	+3.1	-2.1	+2.7
			0.662	-3.7	-0.8	+4.3	+4.2	+2.0	+4.4	+6.0	+3.8	+5.3	-4.6	-0.9	-2.9	+3.7	+0.6	-3.6
			0.683	-4.0	-4.6	-1.5	-0.7	-1.5	+2.8	+6.9	+6.0	+4.8	-2.3	+1.4	-0.5	-1.3	-7.0	-0.6
			0.699	+2.0	-1.2	+0.9	+1.6	-1.1	+1.4	+3.7	+1.7	-0.4	-3.1	0.0	-2.6	+1.4	-0.3	-0.9
	VT	20—21	0.735	+1.5	+1.9	+6.1	+5.4	+1.2	+1.7	+1.4	-0.2	+4.6	-5.1	-2.1	-4.5	+0.6	-3.0	+4.7
			0.749	+6.4	+2.4	+4.9	+3.4	-1.5	-1.0	-0.5	-2.1	+5.3	-2.5	+0.3	-2.1	-1.5	-5.5	+5.3
			0.766	+4.1	-0.5	+1.8	+1.2	-0.7	+2.0	+3.9	+2.0	+4.1	-3.2	-0.5	-2.9	0.0	-2.7	+4.3
			0.786	-3.1	-5.0	+0.6	+1.1	0.0	+5.0	+7.8	+7.3	+12.1	-1.2	+1.4	-1.0	-2.0	+3.3	+6.8
	OMT	24—25 1/2	0.858	+3.7	+0.6	+4.2	+2.8	+0.6	+1.2	+1.1	-1.8	+1.6	-5.8	-3.6	-6.3	+3.1	+5.6	-17.0
			0.865	+4.0	+1.9	+4.6	+5.1	+1.7	+0.9	+1.6	-2.1	+3.5	-6.6	-4.4	-6.3	+4.1	+5.5	-17.2
			0.877	+0.4	-2.6	-0.2	-0.7	-2.8	-0.1	+1.9	+0.3	+8.7	+0.9	+3.6	+0.8	-4.7	+15.3	-9.4
			0.899	+2.0	-0.1	+3.5	+2.0	-1.0	-0.3	-1.2	-4.0	+5.7	-3.3	-0.8	-3.1	-0.7	+5.5	-17.1
Gesamtmittelwert (m) ..			-0.2	-2.1	+0.9	+0.7	-1.5	+0.6	+2.3	+0.6	+0.5	-1.7	+1.0	-1.3	+0.3	0.0	-2.6	
Gesamtdispersion (σ) . . .			3.1	2.7	3.1	2.9	2.6	3.0	3.4	3.8	7.4	2.9	2.9	2.8	2.5	4.8	8.7	

Die entsprechenden mittleren Fehler liegen zwischen den Zahlenwerten: $\epsilon(m) = 0.5$ und 1.8% bzw. $\epsilon(\sigma) = 0.4$ und 1.3%



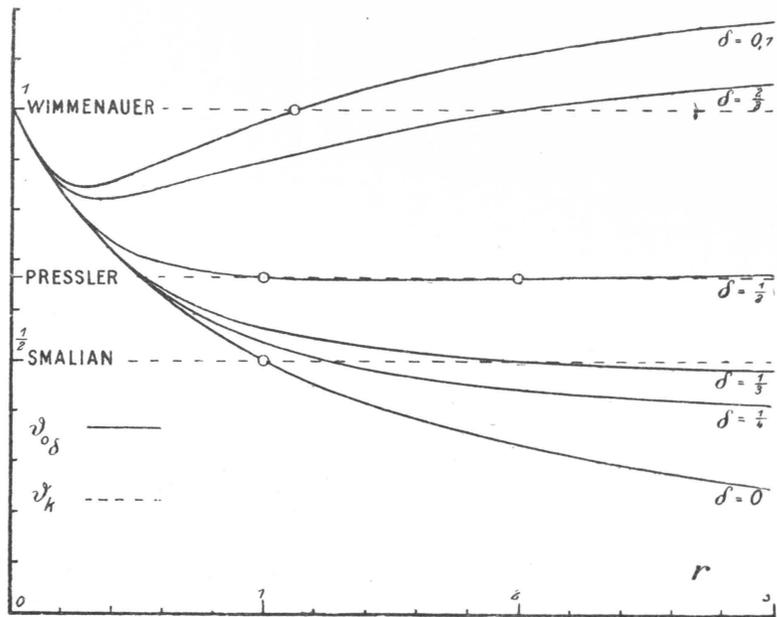


Fig. 8

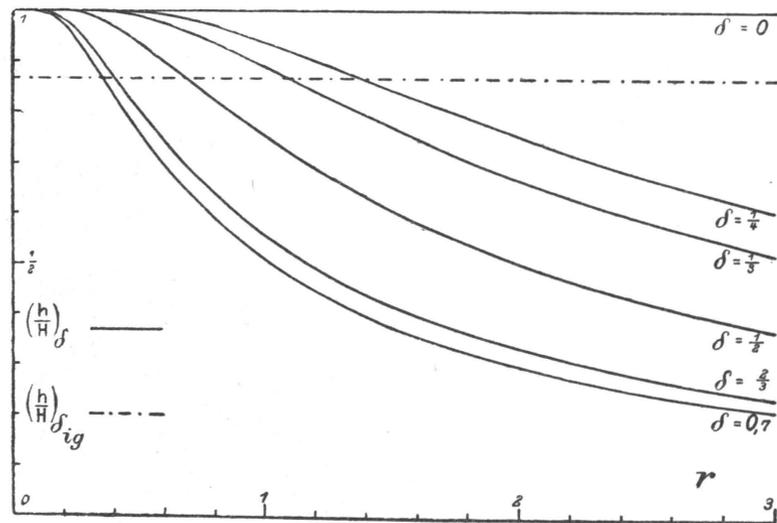


Fig. 9

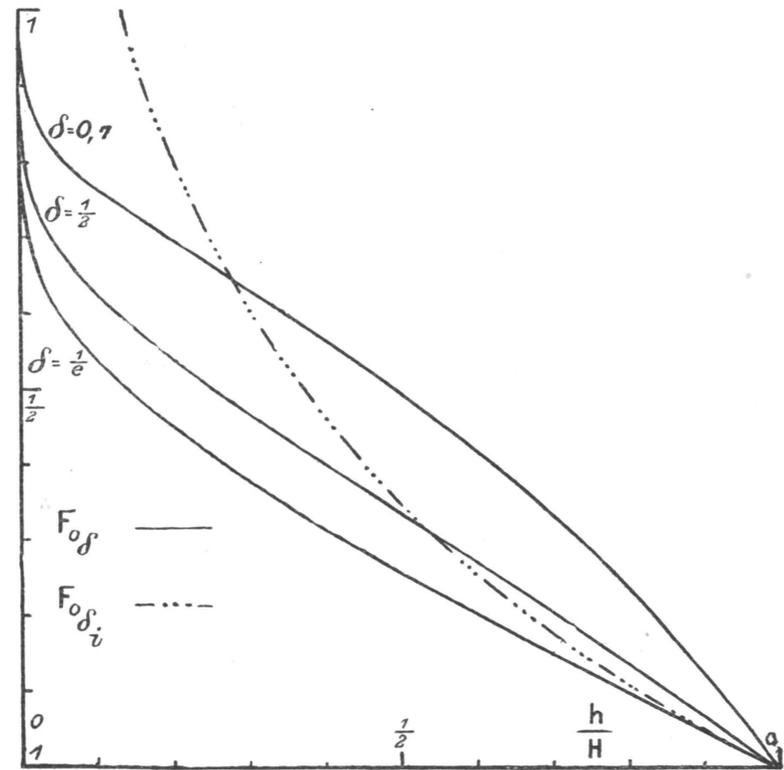


Fig. 10

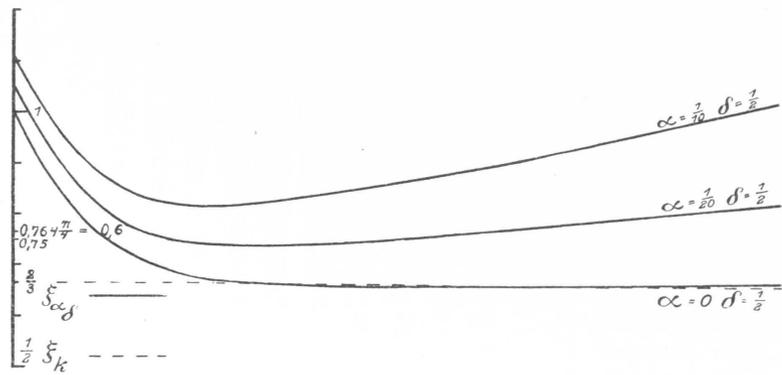


Fig. I1

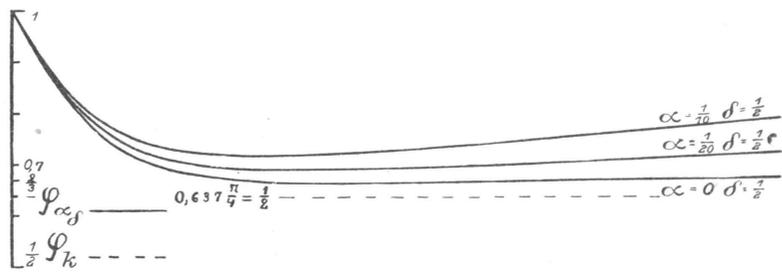


Fig. I2

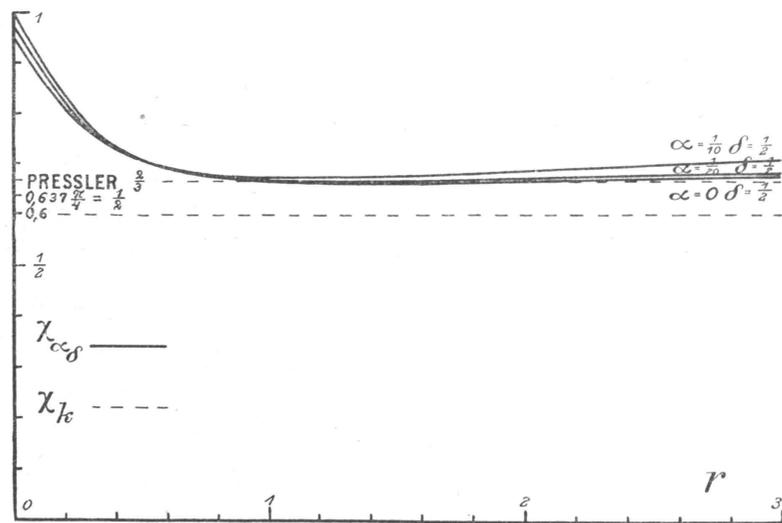


Fig. I3

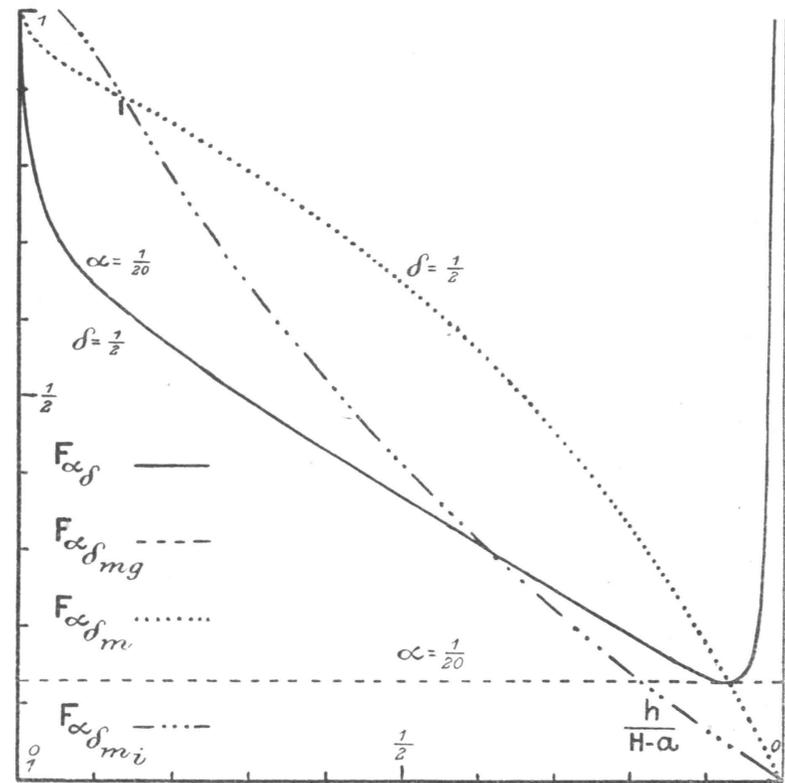


Fig. I4

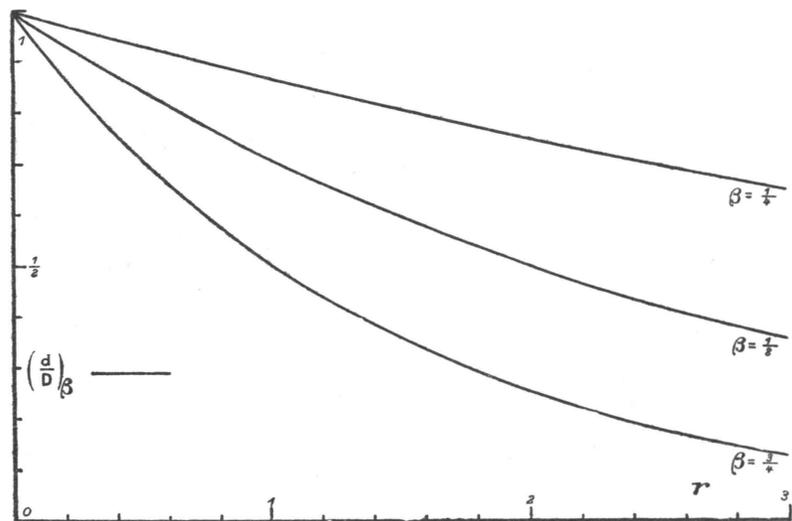


Fig. 15

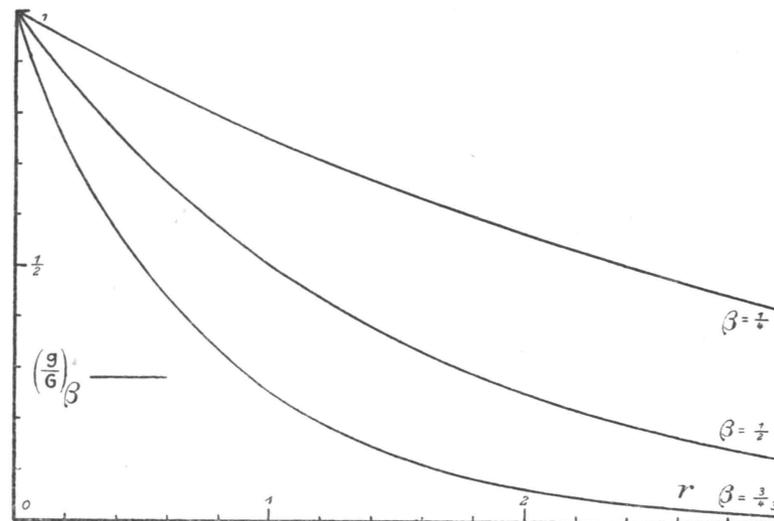


Fig. 16

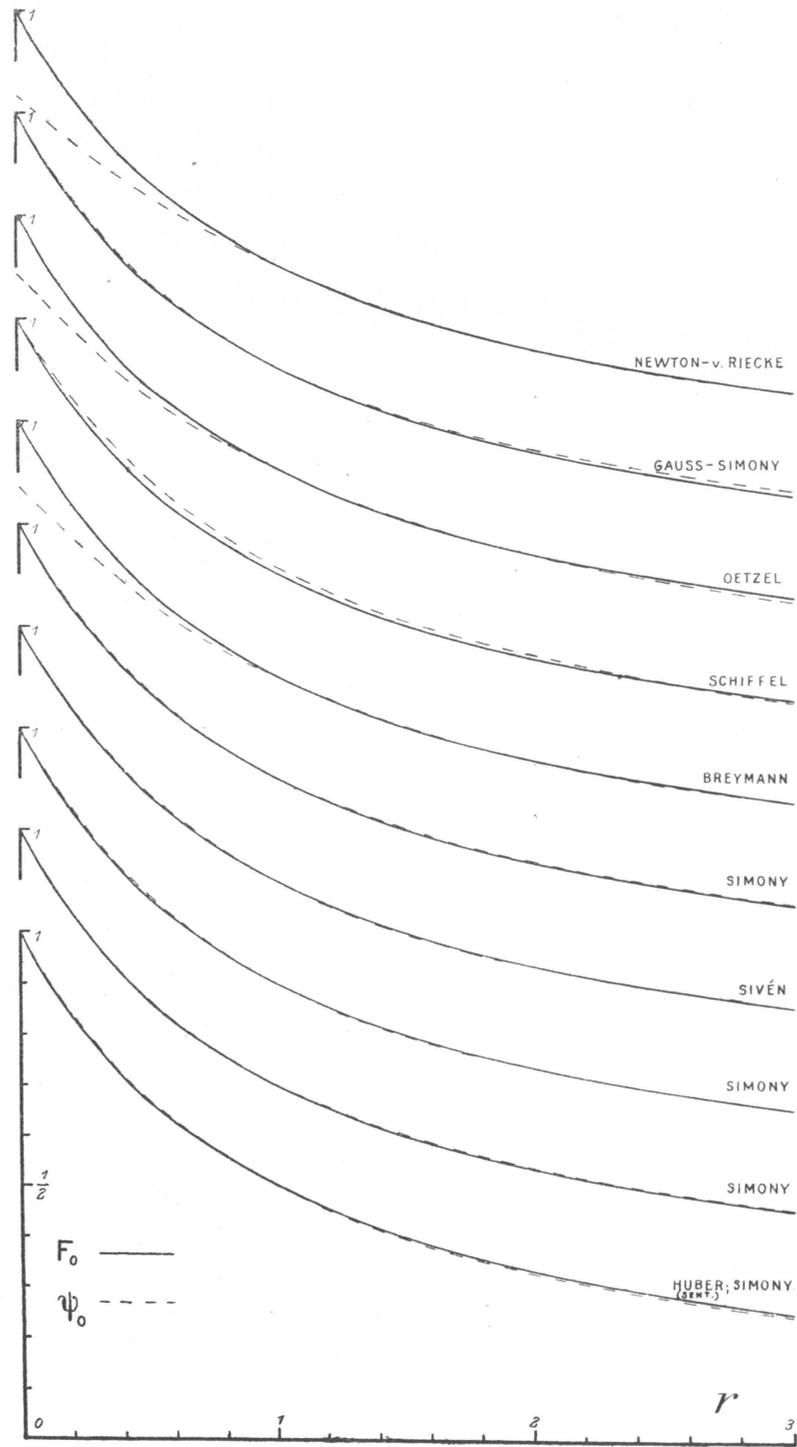


Fig. 17

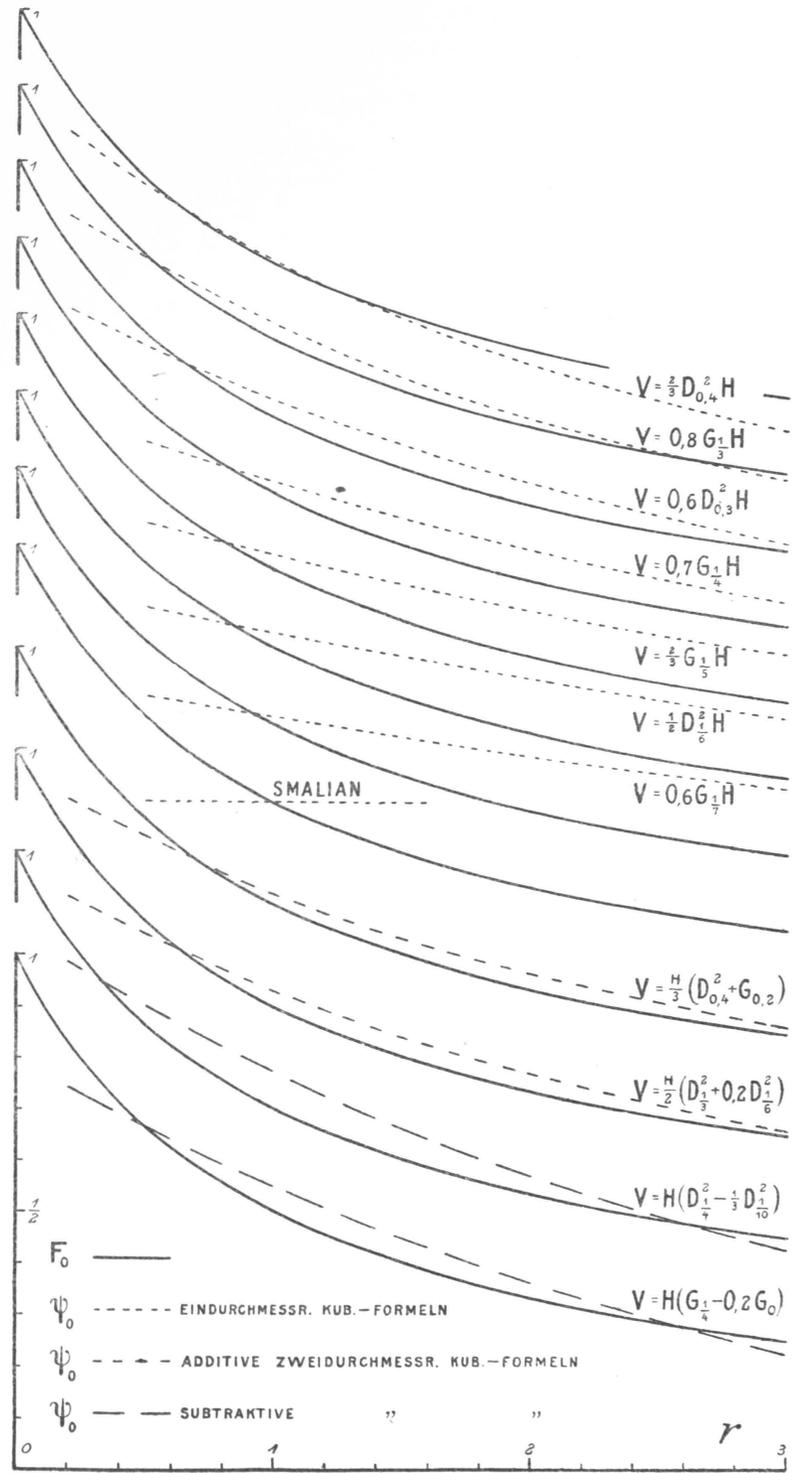


Fig. 18

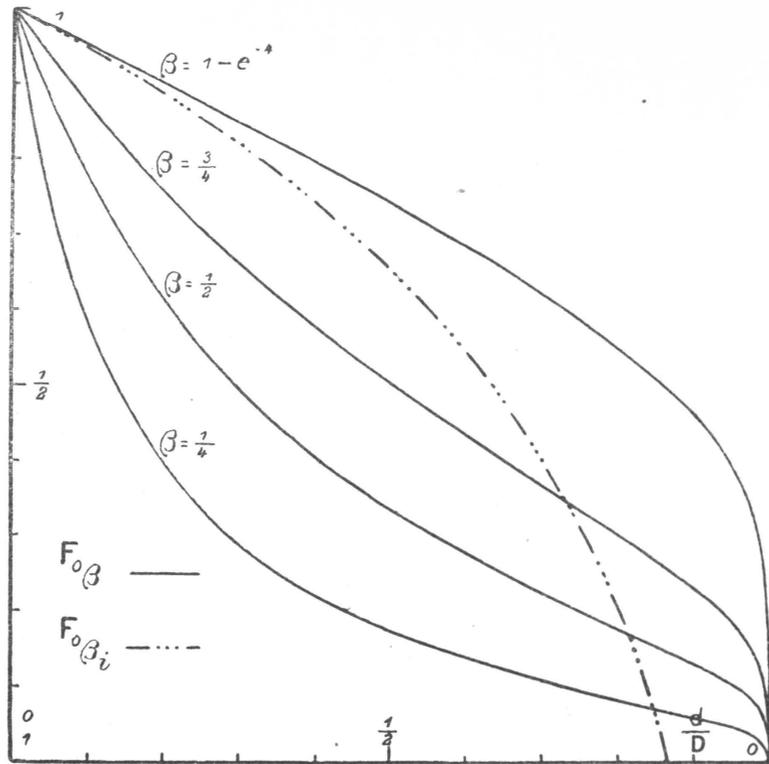


Fig. 19

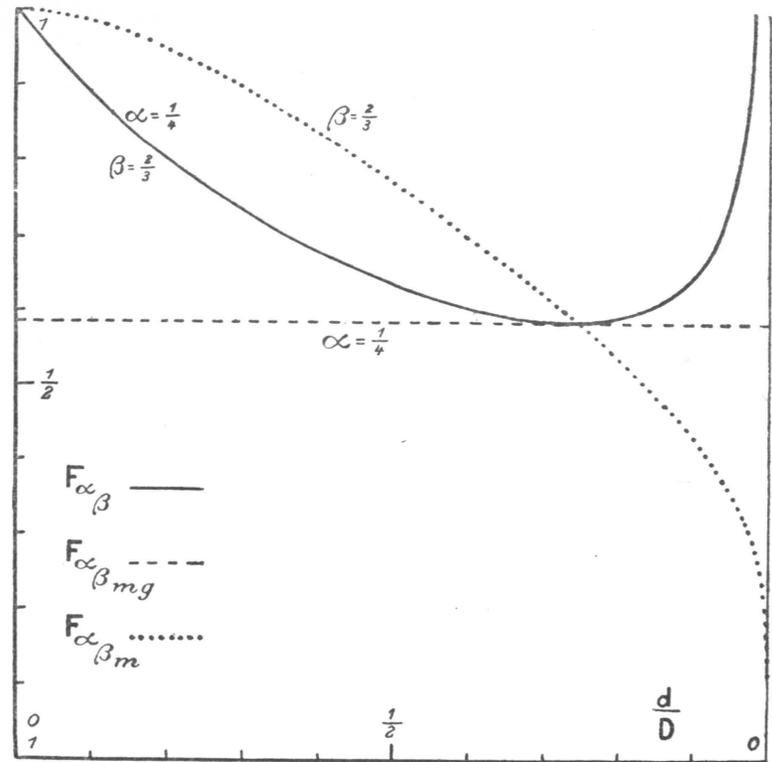


Fig. 20

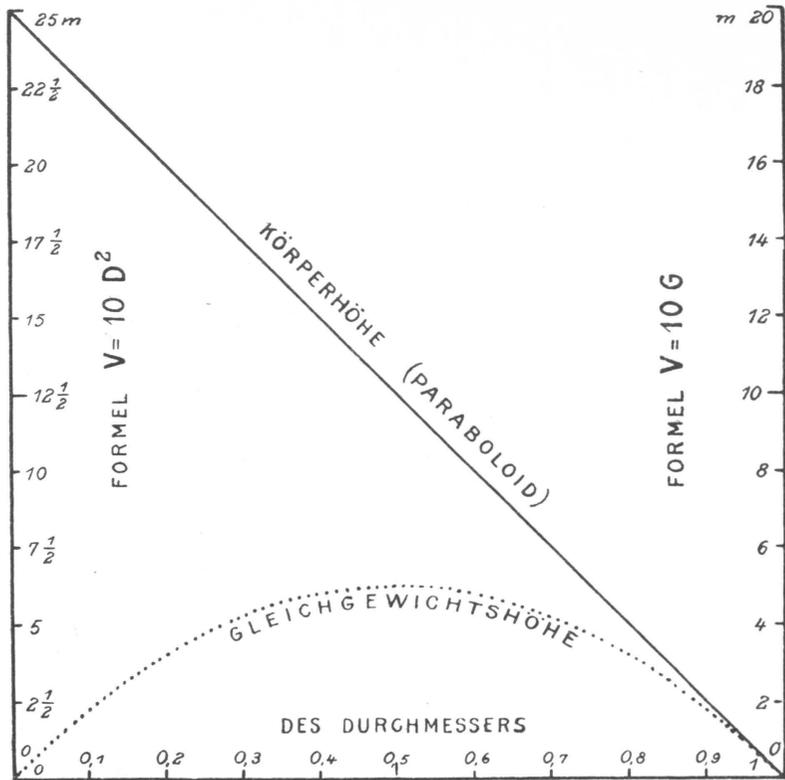


Fig. 2I